

**Übungen zur Vorlesung
„Mathematik im Querschnitt“
— Lösungsvorschlag —**

21. Es ist das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$$

für die Funktion

$$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{\sin x}{y + 1},$$

gegeben; zu betrachten ist damit

$$y' = \frac{\sin x}{y + 1} \quad \text{für} \quad y > -1 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

Es handelt sich um eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen; dabei ist

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \sin x, \quad \text{und} \quad g :]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) = \frac{1}{y + 1}.$$

Wegen $g(y) \neq 0$ für alle $y > -1$ erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int (y + 1) dy = \int \sin x dx$$

und damit

$$\frac{1}{2}(y + 1)^2 = -\cos x + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wegen

$$y(0) = 1 \iff \frac{1}{2}(1 + 1)^2 = -\cos 0 + c \iff 2 = -1 + c \iff c = 3$$

erhält man

$$\frac{1}{2}(y + 1)^2 = -\cos x + 3 \quad \text{bzw.} \quad (y + 1)^2 = 6 - 2 \cos x,$$

woraus sich wegen $y > -1$ bzw. $y + 1 > 0$ dann

$$y + 1 = \sqrt{6 - 2 \cos x} \quad \text{bzw.} \quad y = -1 + \sqrt{6 - 2 \cos x}$$

ergibt. Wegen $6 - 2 \cos x \geq 4 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -1 + \sqrt{6 - 2 \cos x},$$

die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

22. Es handelt sich um die Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen für die stetigen Funktionen

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) = y - 1;$$

dabei liefert die Nullstelle $y_0 = 1$ die konstante Lösung

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) = 1,$$

deren Graph G_ψ die Parallele $y = 1$ zur x -Achse ist. Da g sogar stetig differenzierbar ist, kann wegen des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes jede weitere Lösung $\varphi : D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ der gegebenen Differentialgleichung keinen gemeinsamen Punkt mit ψ haben, ihr Graph G_φ verläuft also entweder komplett unterhalb oder komplett oberhalb der Geraden $y = 1$:

- Für die Lösungen $\varphi : D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$, deren Graph komplett unterhalb der Geraden $y = 1$ verläuft, gilt $\varphi(x) < 1$ und damit unter Verwendung der gegebenen Differentialgleichung

$$\varphi'(x) = \frac{\overbrace{\varphi(x) - 1}^{<0}}{\underbrace{x^2 + 1}_{>0}} < 0$$

für alle $x \in D_\varphi$; folglich sind diese Lösungen aber streng monoton fallend.

- Für die Lösungen $\varphi : D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$, deren Graph komplett oberhalb der Geraden $y = 1$ verläuft, gilt $\varphi(x) > 1$ und damit unter Verwendung der gegebenen Differentialgleichung

$$\varphi'(x) = \frac{\overbrace{\varphi(x) - 1}^{>0}}{\underbrace{x^2 + 1}_{>0}} > 0$$

für alle $x \in D_\varphi$; folglich sind diese Lösungen streng monoton wachsend, und wir erhalten hierfür

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{dy}{y - 1} = \int \frac{dx}{x^2 + 1},$$

wegen $y > 1$ bzw. $y - 1 > 0$ also

$$\ln(y - 1) = \arctan x + c \quad \text{bzw.} \quad y = e^{\arctan x + c} + 1$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Es ergeben sich also die streng monoton wachsenden Lösungsfunktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = e^{\arctan x + c} + 1,$$

für reelle Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

23. Die zu betrachtende Differentialgleichung

$$y' y (x^2 + 1) + x (y^2 + 1) = 0$$

läßt sich in

$$y' y (x^2 + 1) = -x (y^2 + 1) \quad \text{bzw.} \quad \frac{2y}{y^2 + 1} \cdot y' = -\frac{2x}{x^2 + 1}$$

umformen; damit sind die beiden Variablen x und y bereits getrennt, so daß man durch Integration auf beiden Seiten

$$\int \frac{2y}{y^2 + 1} dy = \int \left(-\frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx, \quad \text{also} \quad \ln(y^2 + 1) = -\ln(x^2 + 1) + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ erhält. Wegen

$$y(0) = 1 \iff \ln(1^2 + 1) = -\ln(0^2 + 1) + c \iff \ln 2 = c$$

ergibt sich weiter

$$\ln(y^2 + 1) = -\ln(x^2 + 1) + \ln 2 = \ln \frac{2}{x^2 + 1},$$

woraus sich

$$y^2 + 1 = \frac{2}{x^2 + 1} \quad \text{bzw.} \quad y^2 = \frac{2}{x^2 + 1} - 1 = \frac{2 - (x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

und damit wegen $y(0) = 1$ dann

$$y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}$$

ergibt. Folglich ist

$$\varphi : D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}},$$

die Lösung des gestellten Anfangswertproblems; da die Wurzelfunktion zwar auf \mathbb{R}_0^+ definiert und stetig, aber nur auf \mathbb{R}^+ differenzierbar ist, beinhaltet das maximale Definitionsintervall D_φ genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}} > 0 \iff 1 - x^2 > 0 \iff x^2 < 1 \iff -1 < x < 1;$$

es ist also $D_\varphi =]-1, 1[$.

24. Es handelt sich um die Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen für die stetigen Funktionen

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = 2x, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) = y(y - 1);$$

dabei liefern die beiden Nullstellen $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$ von g die beiden konstanten Lösungen

$$\psi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi_1(x) = 0, \quad \text{und} \quad \psi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi_2(x) = 1,$$

welche jeweils auf ganz \mathbb{R} definiert sind. Da g sogar stetig differenzierbar ist, kann wegen des Existenz- und Eindeigkeitssatzes jede weitere Lösung $\varphi : D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ der gegebenen Differentialgleichung keinen gemeinsamen Punkt mit ψ_1 oder ψ_2 haben, ihr Graph G_φ verläuft also entweder komplett unterhalb von G_{ψ_1} oder komplett zwischen G_{ψ_1} und G_{ψ_2} oder komplett oberhalb von G_{ψ_2} . Hierfür erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{1}{y(y-1)} dy = \int 2x dx,$$

wegen

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{y - (y-1)}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$$

also

$$\ln |y-1| - \ln |y| = x^2 + c$$

und damit

$$\ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = x^2 + c \quad \text{bzw.} \quad \left| 1 - \frac{1}{y} \right| = e^{x^2+c} = e^{x^2} e^c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wir treffen die folgende Fallunterscheidung:

- Verläuft G_φ komplett zwischen G_{ψ_1} und G_{ψ_2} , so gilt $0 < y < 1$ und damit $\frac{1}{y} > 1$; damit erhält man

$$\frac{1}{y} - 1 = e^{x^2} e^c \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{1}{1 + e^{x^2} e^c},$$

und die Lösung

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1 + e^{x^2} e^c},$$

ist wegen $e^c > 0$ auf ganz \mathbb{R} definiert.

- Verläuft G_φ komplett unterhalb von G_{ψ_1} oder komplett oberhalb von G_{ψ_2} , so gilt $y < 0$ oder $y > 1$ und damit $\frac{1}{y} < 1$; damit erhält man

$$1 - \frac{1}{y} = e^{x^2} e^c \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{1}{1 - e^{x^2} e^c},$$

und die Lösung

$$\varphi : D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1 - e^{x^2} e^c},$$

ist genau dann auf ganz \mathbb{R} definiert, wenn der Nenner $1 - e^{x^2} e^c$ ihres Funktionsterms ohne Nullstelle ist; wegen

$$1 - e^{x^2} e^c = 0 \iff e^{x^2} e^c = 1 \iff e^{x^2} = e^{-c} \iff x^2 = -c$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist dies genau dann der Fall, wenn $c > 0$ ist.