MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/17
Blatt 5
22.11.2016

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

17. Für alle $x \in \,]0,\infty[$ gilt

$$x\,y' + 3\,y - 5\,x^2 = 0 \iff x\,y' = -3\,y + 5\,x^2 \iff y' = -\frac{3}{x}\cdot y + 5\,x;$$

folglich ist die inhomogene lineare Differentialgleichung $y' = a(x)\,y + b(x)$ erster Ordnung mit

$$a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad a(x) = -\frac{3}{x}, \qquad \text{und} \qquad b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad b(x) = 5\,x,$$

zu betrachten. Da

$$A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad A(x) = -3\,\ln x,$$

eine Stammfunktion von a ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\,e^{A(x)} = c\,e^{-3\,\ln x} = c\left(e^{\ln x}\right)^{-3} = c\,x^{-3},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)\,y$ dar.

Zur Behandlung der inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = u(x)\,x^{-3}$, der Variation der Konstanten mit einer differenzierbaren Funktion $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Wegen

$$\varphi'(x) = u'(x)\,x^{-3} + u(x)\cdot\left(-3\,x^{-4}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ ist φ genau dann Lösung von $y' = a(x)\,y + b(x)$, wenn

$$u'(x)\,x^{-3} - 3\,u(x)\,x^{-4} = -\frac{3}{x}\left(u(x)\,x^{-3}\right) + 5\,x,$$

also

$$u'(x)\,x^{-3} = 5\,x \qquad \text{bzw.} \qquad u(x) = 5\,x^4$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt.

- Um eine partikuläre Lösung $\varphi_p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu erhalten, können wir speziell

$$u(x) = x^5$$

und damit

$$\varphi_p(x) = u(x)\, x^{-3} = x^5 \cdot x^{-3} = x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ wählen. Die allgemeine Lösung von $y' = a(x)\, y + b(x)$ ist damit die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_p + \varphi_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + c\, x^{-3},$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

- Um gleich die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu erhalten, wählen wir

$$u(x) = x^5 + c$$

für $c \in \mathbb{R}$ und damit

$$\varphi(x) = u(x)\, x^3 = \big(x^5 + c\big) \cdot x^{-3} = x^2 + c\, x^{-3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

18. Dem gegebenen Anfangswertproblem

$$y' = (\ln x) \cdot y + x^x \qquad \text{für} \qquad x > 0 \qquad \text{mit} \qquad y(1) = 0$$

liegt die inhomogene lineare Differentialgleichung $y' = a(x)\, y + b(x)$ erster Ordnung mit den stetigen Funktionen

$$a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad a(x) = \ln x, \qquad \text{und} \qquad b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad b(x) = x^x = e^{x \ln x},$$

zugrunde. Da

$$A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad A(x) = x \ln x - x,$$

eine Stammfunktion von a ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\, e^{A(x)} = c\, e^{x \ln x - x} = c\, e^{x \ln x} e^{-x} = c\, x^x\, e^{-x},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)\, y$ dar.

Zur Behandlung der inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz der Variation der Konstanten

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = u(x)\, e^{x \ln x - x},$$

mit einer differenzierbaren Funktion $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Wegen

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= u'(x)\, e^{x \ln x - x} + u(x) \cdot \big(e^{x \ln x - x} \cdot \big(1 \cdot \ln x + x \cdot \tfrac{1}{x} - 1\big)\big) \\ &= u'(x)\, e^{x \ln x - x} + u(x)\, e^{x \ln x - x}\, \ln x \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ ist φ genau dann Lösung von $y' = a(x)\,y + b(x)$, wenn

$$u'(x)\,e^{x\ln x - x} + u(x)\,e^{x\ln x - x}\,\ln x = \ln x \cdot u(x)\,e^{x\ln x - x} + e^{x\ln x},$$

also

$$u'(x)\,e^{x\ln x}e^{-x} = e^{x\ln x} \qquad \text{bzw.} \qquad u'(x) = e^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt. Damit ergibt sich

$$u(x) = e^x + c \qquad \text{für ein} \quad c \in \mathbb{R}$$

und damit

$$\varphi(x) = u(x)\,e^{x\ln x - x} = (e^x + c)\left(x^x\,e^{-x}\right) = \left(1 + c\,e^{-x}\right)x^x,$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$; die Gesamtheit dieser Funktionen stellt die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung dar. Wegen

$$\varphi(1) = 0 \iff \left(1 + c\,e^{-1}\right)\cdot 1^1 = 0 \iff c\,e^{-1} = -1 \iff c = -e$$

ist die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \left(1 + (-e)\,e^{-x}\right)x^x = \left(1 - e^{1-x}\right)x^x,$$

die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

19. Zu betrachten ist die homogene lineare Differentialgleichung $y' = a(x)\,y$ mit der stetigen Funktion

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a(x) = -e^x.$$

Da

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A(x) = -e^x,$$

eine Stammfunktion von a ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\,e^{A(x)} = c\,e^{-e^x},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $y' = a(x)\,y$ dar. Wegen

$$\varphi_c(0) = -1 \iff c\,e^{-e^0} = -1 \iff c\,e^{-1} = -1 \iff c = -e$$

ist die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad -e \cdot e^{-e^x},$$

die Lösung des gestellten Anfangswertproblems

$$y' = -e^x\,y, \qquad y(0) = -1.$$

Zur Bestimmung der Menge $\varphi(\mathbb{R})$ ihrer Funktionswerte verwenden wir die bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktion: wegen

$$\{e^x \mid x \in \mathbb{R}\} = \,]0;\infty[\,, \qquad \text{also} \qquad \{-e^x \mid x \in \mathbb{R}\} = \,]-\infty;0[\,,$$

ergibt sich

$$\left\{e^{-e^x} \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \,]0;1[\,, \qquad \text{also} \qquad \varphi(\mathbb{R}) = \left\{-e\cdot e^{-e^x} \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \,]-e;0[\,.$$

20. Wegen
$$y' + a\,y = e^{b\,x} \iff y' = (-a)\,y + e^{b\,x}$$
ist die lineare Differentialgleichung $y' = \alpha(x)\,y + \beta(x)$ mit den stetigen Funktionen
$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha(x) = -a, \qquad \text{und} \qquad \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \beta(x) = e^{b\,x},$$
in Abhängigkeit von $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ zu betrachten. Da
$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A(x) = -a\,x,$$
eine Stammfunktion von α ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen
$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\,e^{A(x)} = c\,e^{-a\,x},$$
für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = \alpha(x)\,y$ dar. Zur Behandlung der gegebenen inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz
$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = u(x) \cdot e^{-a\,x},$$
der Variation der Konstanten mit einer differenzierbaren Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wegen
$$\varphi'(x) = u'(x) \cdot e^{-a\,x} + u(x) \cdot \big(e^{-a\,x} \cdot (-a)\big)$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ ist φ genau dann Lösung von $y' = \alpha(x)\,y + \beta(x)$, wenn
$$u'(x) \cdot e^{-a\,x} - a \cdot u(x) \cdot e^{-a\,x} = (-a) \cdot u(x) \cdot e^{-a\,x} + e^{b\,x},$$
also
$$u'(x) = e^{a\,x} \cdot e^{b\,x} = e^{(a+b)\,x}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; wir erhalten
$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{a+b}\,e^{(a+b)\,x} + c, & \text{falls } a + b \neq 0, \\ x + c, & \text{falls } a + b = 0, \end{cases}$$
für $c \in \mathbb{R}$ und damit
$$\varphi(x) = u(x) \cdot e^{-a\,x} = \begin{cases} \big(\frac{1}{a+b}\,e^{(a+b)\,x} + c\big)\,e^{-a\,x}, & \text{falls } a + b \neq 0, \\ (x + c)\,e^{-a\,x}, & \text{falls } a + b = 0, \end{cases}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$. Für die Bestimmung der noch freien Konstante $c \in \mathbb{R}$ über die Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$ und die Untersuchung der Lösungsfunktion auf $\mathbb{R}^+$ treffen wir demnach die folgende Fallunterscheidung:

- Im Fall $a + b \neq 0$ erhält man
$$\varphi(0) = 0 \iff \left(\frac{1}{a+b}\,e^0 + c\right) e^0 = 0 \iff c = -\frac{1}{a+b};$$

damit ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{a+b}\, e^{(a+b)\,x} - \frac{1}{a+b} \right) e^{-a\,x} = \frac{1}{a+b} \left(e^{(a+b)\,x} - 1 \right) e^{-a\,x} =$$

$$= \frac{1}{a+b} \left(e^{(a+b)\,x} \cdot e^{-a\,x} - e^{-a\,x} \right) = \frac{1}{a+b} \left(e^{b\,x} - e^{-a\,x} \right)$$

die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems; diese ist wegen $a + b \neq 0$ und damit $b \neq -a$ genau dann auf $\mathbb{R}^+$ beschränkt, wenn $b \leq 0$ und $-a \leq 0$, also $b \leq 0 \leq a$, gilt.

- Im Fall $a + b = 0$ erhält man

$$\varphi(0) = 0 \iff (0 + c)\, e^0 = 0 \iff c = 0;$$

damit ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x\, e^{-a\,x},$$

die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems; diese ist genau dann auf $\mathbb{R}^+$ beschränkt, wenn $-a < 0$, also $0 < a$, gilt.