MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/17
Blatt 4
15.11.2016

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

13. Die gegebene Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 6x^2y - 5x^2 + 2x - 2y^3,$$

ist zweimal stetig partiell differenzierbar, und für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_1 f(x, y) = 12xy - 10x + 2 \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x, y) = 6x^2 - 6y^2,$$

also

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \left(12xy - 10x + 2,\ 6x^2 - 6y^2\right),$$

und damit

$$\partial_1\partial_1 f(x, y) = 12y - 10 \qquad \text{und} \qquad \partial_2\partial_1 f(x, y) = 12x$$

sowie

$$\partial_1\partial_2 f(x, y) = 12x \qquad \text{und} \qquad \partial_2\partial_2 f(x, y) = -12y,$$

also

$$\operatorname{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 12y - 10 & 12x \\ 12x & -12y \end{pmatrix}.$$

Für einen kritischen Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ von f gilt $\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0)$, also

$$12xy - 10x + 2 = 0 \qquad \text{und} \qquad 6x^2 - 6y^2 = 0;$$

aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$6x^2 = 6y^2, \quad \text{also} \quad x^2 = y^2, \qquad \text{und damit} \qquad x = y \quad \text{oder} \quad x = -y,$$

und wir treffen die folgende Fallunterscheidung:

- Für $x = y$ ergibt sich aus der ersten Gleichung

  $$12x^2 - 10x + 2 = 0, \qquad \text{also} \qquad 6x^2 - 5x + 1 = 0,$$

  und damit

  $$x_{1,2} = \frac{1}{12}\left(5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}\right) = \frac{5 \pm 1}{12},$$

  also $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = \frac{1}{3}$.

- Für $x = -y$ ergibt sich aus der ersten Gleichung

$$-12x^2 - 10x + 2 = 0, \qquad \text{also} \qquad 6\,x^2 + 5\,x - 1 = 0,$$

  und damit

$$x_{3,4} = \frac{1}{12}\left(-5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}\right) = \frac{-5 \pm 7}{12},$$

  also $x_3 = \frac{1}{6}$ und $x_4 = -1$.

Damit kommen als kritische Punkte von f nur die vier Punkte $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ und $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ sowie $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$ und $(-1, 1)$ in Frage:

- Es ist

$$\operatorname{grad} f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = (0,0) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Hess} f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix};$$

  wegen $\det \operatorname{Hess} f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -12 < 0$ ist $\operatorname{Hess} f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ indefinit. Folglich besitzt f in $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ einen Sattelpunkt.

- Es ist

$$\operatorname{grad} f\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right) = (0,0) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Hess} f\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix};$$

  wegen $\det \operatorname{Hess} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 8 > 0$ und $\operatorname{Spur} \operatorname{Hess} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -10 < 0$ ist $\operatorname{Hess} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ negativ definit. Folglich besitzt f in $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ein (isoliertes) lokales Maximum.

- Es ist

$$\operatorname{grad} f\left(\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{6}\right) = (0,0) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Hess} f\left(\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} -12 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

  wegen $\det \operatorname{Hess} f\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right) = -28 < 0$ ist $\operatorname{Hess} f\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$ indefinit. Folglich besitzt f in $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$ einen Sattelpunkt.

- Es ist

$$\operatorname{grad} f(-1, 1) = (0,0) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Hess} f(-1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ -12 & -12 \end{pmatrix};$$

  wegen $\det \operatorname{Hess} f(-1, 1) = -168 < 0$ ist $\operatorname{Hess} f(-1, 1)$ indefinit. Folglich besitzt f in $(-1, 1)$ einen Sattelpunkt.

Zur Bestimmung des Wertebereichs W_f der Funktion f betrachten wir deren Verhalten auf der y–Achse $\{(0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$; wegen

$$f(0, t) = -2\,t^3 \qquad \text{für alle} \qquad t \in \mathbb{R}$$

ergibt sich schließlich der Wertebereich $W_f = \mathbb{R}$.

14. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 + y^2 - x\,y - x,$$

ist (als Polynomfunktion) beliebig oft stetig differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt zum einen

$$\partial_x f(x,y) = 3\,x^2 - y - 1 \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) = 2\,y - x,$$

also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \big(3\,x^2 - y - 1,\ 2\,y - x\big)\,,$$

und zum anderen

$$\partial_x\partial_x f(x,y) = 6\,x \qquad \text{und} \qquad \partial_y\partial_y f(x,y) = 2$$

sowie

$$\partial_x\partial_y f(x,y) = -1 = \partial_y\partial_x f(x,y),$$

also

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6\,x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Als lokale Extremstellen oder Sattelpunkte der auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten und partiell differenzierbaren Funktion f kommen ausschließlich ihre kritischen Stellen, also die Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$ in Frage. Mit

$$\partial_y f(x,y) = 0 \iff 2\,y - x = 0 \iff x = 2\,y$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) = 0 \quad &\iff \quad 3\,x^2 - y - 1 = 0 \\
&\underset{x=2\,y}{\iff} \quad 3\,(2\,y)^2 - y - 1 = 0 \iff 12\,y^2 - y - 1 = 0 \\
&\iff \quad y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-1)}}{2 \cdot 12} \\
&\iff \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{24} = \frac{1 \pm 7}{24} \iff y \in \left\{\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4}\right\};
\end{aligned}$$

damit besitzt f genau die beiden kritischen Punkte $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, die wir nun mit Hilfe der Hessematrix näher untersuchen:

- Es ist $\operatorname{grad} f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = (0,0)$ mit

  $$H_1 = \operatorname{Hess} f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

  wegen $\det(H_1) = 7 > 0$ und $\operatorname{Spur}(H_1) = 6 > 0$ ist H_1 positiv definit, so daß f in $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ein isoliertes lokales Minimum besitzt.

- Es ist $\operatorname{grad} f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = (0,0)$ mit

  $$H_2 = \operatorname{Hess} f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

  wegen $\det(H_2) = -7 < 0$ ist H_2 indefinit, so daß f in $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ einen Sattelpunkt besitzt.

b) Das gegebene Rechteck

$$R = [-1,1] \times [-1,2] \subseteq \mathbb{R}^2$$

mit den Ecken $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,2)$ und $(-1,2)$ ist eine abgeschlossene wie auch beschränkte und damit kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, so daß die (als Polynomfunktion insbesondere) stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nach dem Satz von Weierstraß auf R (mindestens) eine globale Minimalstelle und (mindestens) eine globale Maximalstelle besitzt.

Da die Funktion f darüber hinaus partiell differenzierbar ist, kommen für globale Extremstellen $(a,b) \in R$ von f neben der in a) ermittelten lokalen Minimalstelle $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ nur Punkte auf dem Rand ∂R des Rechtecks R in Frage:

- Für die Punkte $(-1,t)$ mit $t \in [-1,2]$ der linken Rechteckseite gilt

  $$f(-1,t) = (-1)^3 + t^2 - (-1) \cdot t - (-1) = t^2 + t;$$

  da die quadratische Hilfsfunktion

  $$h_1 : [-1,2] \to \mathbb{R}, \quad h_1(t) = t^2 + t,$$

  ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 2$, sowie in den Nullstellen ihrer Ableitung

  $$h_1'(t) = 2\,t + 1,$$

  also in $t = -\frac{1}{2}$ annehmen kann, kommen für (a,b) nur die Punkte $(-1,-1)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ und $(-1,2)$ in Frage.
- Für die Punkte $(1,t)$ mit $t \in [-1,2]$ der rechten Rechteckseite gilt

  $$f(1,t) = 1^3 + t^2 - 1 \cdot t - (-1) = t^2 - t;$$

  da die quadratische Hilfsfunktion

  $$h_2 : [-1,2] \to \mathbb{R}, \quad h_2(t) = t^2 - t,$$

  ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 2$, sowie in den Nullstellen ihrer Ableitung

  $$h_1'(t) = 2\,t - 1,$$

  also in $t = \frac{1}{2}$ annehmen kann, kommen für (a,b) nur die Punkte $(1,-1)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ und $(1,2)$ in Frage.

- Für die Punkte $(t,-1)$ mit $t \in [-1,1]$ der unteren Rechteckseite gilt

  $$f(t,-1) = t^3 + (-1)^2 - t \cdot (-1) - t = t^3 + 1;$$

  da die kubische Hilfsfunktion

  $$h_3 : [-1;1] \to \mathbb{R}, \quad h_3(t) = t^3 + 1,$$

  bekanntlich streng monoton wächst und damit ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 1$, annehmen kann, kommen für (a,b) nur die Punkte $(-1,-1)$ und $(1,-1)$ in Frage.
- Für die Punkte $(t,2)$ mit $t \in [-1,1]$ der oberen Rechteckseite gilt

  $$f(t,2) = t^3 + 2^2 - t \cdot 2 - t = t^3 - 3\,t + 4;$$

  da die kubische Hilfsfunktion

  $$h_4 : [-1;1] \to \mathbb{R}, \quad h_4(t) = t^3 - 3\,t + 4,$$

  ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 1$, die hier mit den Nullstellen ihrer Ableitung

  $$h_4'(t) = 3\,t^2 - 3 = 3\left(t^2 - 1\right) = 3(t-1)(t+1)$$

  zusammenfallen, annehmen kann, kommen für (a,b) nur die Punkte $(-1,2)$ und $(1,2)$ in Frage.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(a,b)	$(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$	$(-1,-1)$	$(-1,-\frac{1}{2})$	$(-1,2)$	$(1,-1)$	$(1,\frac{1}{2})$	$(1,2)$
$f(a,b)$	$-\frac{13}{27}$	0	$-\frac{1}{4}$	6	2	$-\frac{1}{4}$	2

erkennt man, daß f den maximalen Funktionswert 6 im Punkt $(-1,2)$ sowie den minimalen Funktionswert $-\frac{13}{27}$ im Punkt $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ annimmt.

15. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\,y\,\exp(x-y),$$

ist als Produkt und Verknüpfung linearer Funktionen und der Exponentialfunktion partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y) &= y \cdot \exp(x-y) + x\,y \cdot (\exp(x-y) \cdot 1) = \\ &= (y + x\,y)\exp(x-y) = y\,(1+x)\,\exp(x-y)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_y f(x,y) &= x \cdot \exp(x-y) + x\,y \cdot (\exp(x-y) \cdot (-1)) = \\ &= (x - x\,y)\exp(x-y) = x\,(1-y)\,\exp(x-y),\end{aligned}$$

insgesamt also

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x,y) &= (\partial_x f(x,y),\ \partial_y f(x,y)) = \\ &= \big(y\,(1+x)\ \exp(x-y),\ x\,(1-y)\ \exp(x-y)\big).\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y) = 0 \iff y\,(1+x)\ \underbrace{\exp(x-y)}_{>0} = 0 \iff \\ \iff \big(y=0 \ \text{ oder } \ 1+x=0\big) \iff \big(y=0 \ \text{ oder } \ x=-1\big)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_y f(x,y) = 0 \iff x\,(1-y)\ \underbrace{\exp(x-y)}_{>0} = 0 \iff \\ \iff \big(x=0 \ \text{ oder } \ 1-y=0\big) \iff \big(x=0 \ \text{ oder } \ y=1\big)\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \iff \big((x,y)=(0,0) \ \text{ oder } \ (x,y)=(-1,1)\big).$$

b) Die gegebene Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist sogar beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}\partial_x\partial_x f(x,y) &= y \cdot \exp(x-y) + y\,(1+x) \cdot (\exp(x-y) \cdot 1) = \\ &= (y + y(1+x))\exp(x-y) = y\,(2+x)\exp(x-y)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_y\partial_y f(x,y) &= -x \cdot \exp(x-y) + x\,(1-y) \cdot (\exp(x-y) \cdot (-1)) = \\ &= (-x - x\,(1-y))\exp(x-y) = x\,(y-2)\exp(x-y)\end{aligned}$$

sowie unter Verwendung des Satzes von Schwarz

$$\begin{aligned}\partial_x\partial_y f(x,y) &= \partial_y\partial_x f(x,y) = \\ &= (1+x) \cdot \exp(x-y) + y\,(1+x) \cdot (\exp(x-y) \cdot (-1)) = \\ &= ((1+x) - y\,(1+x))\exp(x-y) = (1+x)\,(1-y)\exp(x-y),\end{aligned}$$

und wir erhalten die Hessematrix

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess} f(x,y) &= \begin{pmatrix} \partial_x\partial_x f(x,y) & \partial_x\partial_y f(x,y) \\ \partial_y\partial_x f(x,y) & \partial_y\partial_y f(x,y)\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} y\,(2+x)\exp(x-y) & (1+x)\,(1-y)\exp(x-y) \\ (1+x)\,(1-y)\exp(x-y) & x\,(y-2)\exp(x-y)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Als lokale Extremstellen der partiell differenzierbaren und auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion f kommen nur ihre kritischen Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$, gemäß a) also $(0,0)$ und $(-1,1)$, in Frage.

- Die Hessematrix
$$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
ist wegen $\det \operatorname{Hess} f(0,0) = -1 < 0$ indefinit; damit besitzt f in $(0,0)$ einen Sattelpunkt, insbesondere also kein lokales Extremum.
- Die Hessematrix
$$\operatorname{Hess} f(-1,1) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$$
besitzt den doppelten Eigenwert $e^{-2} > 0$ und ist demnach positiv definit; damit besitzt f in $(-1,1)$ ein (isoliertes) lokales Minimum.

16. Die gegebene Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \big(x^2+1\big)\left(\sin(\pi y)+2\right),$$
ist (als Produkt einer quadratischen und einer trigonometrischen Funktion) beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt
$$\partial_x f(x,y) = 2\,x\left(\sin(\pi y)+2\right) \quad \text{und} \quad \partial_y f(x,y) = \big(x^2+1\big)\,\pi\,\cos(\pi y),$$
also
$$\operatorname{grad} f(x,y) = \Big(2\,x\left(\sin(\pi y)+2\right),\ \big(x^2+1\big)\,\pi\,\cos(\pi y)\Big),$$
sowie
$$\partial_x\partial_x f(x,y) = 2\left(\sin(\pi y)+2\right) \quad \text{und} \quad \partial_y\partial_y f(x,y) = -\big(x^2+1\big)\,\pi^2\sin(\pi y)$$
mit
$$\partial_x\partial_y f(x,y) = 2\,x\,\pi\cos(\pi y) = \partial_y\partial_x f(x,y),$$
also
$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\left(\sin(\pi y)+2\right) & 2\,x\,\pi\cos(\pi y) \\ 2\,x\,\pi\cos(\pi y) & -\left(x^2+1\right)\pi^2\sin(\pi y) \end{pmatrix}.$$
Als Extremstellen der auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten und partiell differenzierbaren Funktion f kommen nur ihre kritischen Stellen, also die Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$ in Frage, wegen
$$\partial_x f(x,y) = 0 \iff 2\,x\underbrace{\left(\sin(\pi y)+2\right)}_{\geq(-1)+2=1>0} = 0 \iff x = 0$$
und
$$\partial_y f(x,y) = 0 \iff \underbrace{\big(x^2+1\big)}_{\geq 1>0}\pi\,\cos(\pi y) = 0 \iff$$
$$\iff \cos(\pi y) = 0 \iff \pi y \in \tfrac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\cdot\pi \iff y \in \tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}$$

also genau die Punkte $(0, y_k)$ mit $y_k = \frac{1}{2} + k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Wir untersuchen nun diese kritischen Stellen mit Hilfe der Hessematrix, wobei wegen

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess} f(0, y_k) &= \begin{pmatrix} 2\,(\sin(\pi y_k) + 2) & 0 \cdot \cos(\pi y_k) \\ 0 \cdot \cos(\pi y_k) & -\pi^2 \sin(\pi y_k) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\,\left(\sin(\frac{\pi}{2} + k\,\pi) + 2\right) & 0 \\ 0 & -\pi^2 \sin(\frac{\pi}{2} + k\,\pi) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Ist $k \in \mathbb{Z}$ gerade, so gilt $\sin(\frac{\pi}{2} + k\,\pi) = 1$; damit besitzt

  $$\operatorname{Hess} f(0, y_k) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -\pi^2 \end{pmatrix}$$

  den positiven Eigenwert 6 und den negativen Eigenwert $-\pi^2$ und ist folglich indefinit. Somit ist $(0, y_k)$ ein Sattelpunkt von f, insbesondere also kein lokales Extremum von f.

- Ist $k \in \mathbb{Z}$ ungerade, so gilt $\sin(\frac{\pi}{2} + k\,\pi) = -1$; damit besitzt

  $$\operatorname{Hess} f(0, y_k) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \pi^2 \end{pmatrix}$$

  die beiden positiven Eigenwerte 2 und π^2 und ist folglich positiv definit. Somit ist $(0, y_k)$ ein isoliertes lokales Minimum von f, insbesondere also kein lokales Maximum von f.

Diese Überlegungen beantworten die Teilaufgaben a) und b) folgendermaßen:

a) Die Funktion f besitzt unendlich viele isolierte lokale Minima, nämlich die Punkte $(0, \frac{1}{2} + k)$ für alle ungeraden $k \in \mathbb{Z}$.

b) Die Funktion f besitzt keine lokalen Maxima, da die in Frage kommenden kritischen Stellen entweder isolierte lokale Minima oder Sattelpunkte sind.

c) Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f(x, y) = \underbrace{\big(\underbrace{x^2}_{\geq 0} + 1\big)}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\big(\underbrace{\sin(\pi y)}_{\geq -1} + 2\big)}_{\geq 1} \geq 1;$$

damit ist zunächst $f(\mathbb{R}^2) \subseteq [1, \infty[$. Für „$\supseteq$“ sei $z \in [1, \infty[$; wegen $z \geq 1$ ist $z - 1 \geq 0$ und damit $\left(\sqrt{z-1}, -\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$, und es gilt

$$f\left(\sqrt{z-1}, -\tfrac{1}{2}\right) = \big(\underbrace{\sqrt{z-1}^{\,2}}_{=z-1} + 1\big) \cdot \big(\underbrace{\sin(-\tfrac{\pi}{2})}_{=-1} + 2\big) = z \cdot 1 = z,$$

also $z \in f(\mathbb{R}^2)$. Insgesamt erhält man $f(\mathbb{R}^2) = [1, \infty[$.