MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/17
Blatt 3
08.11.2016

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

9. Bei der Definitionsmenge

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

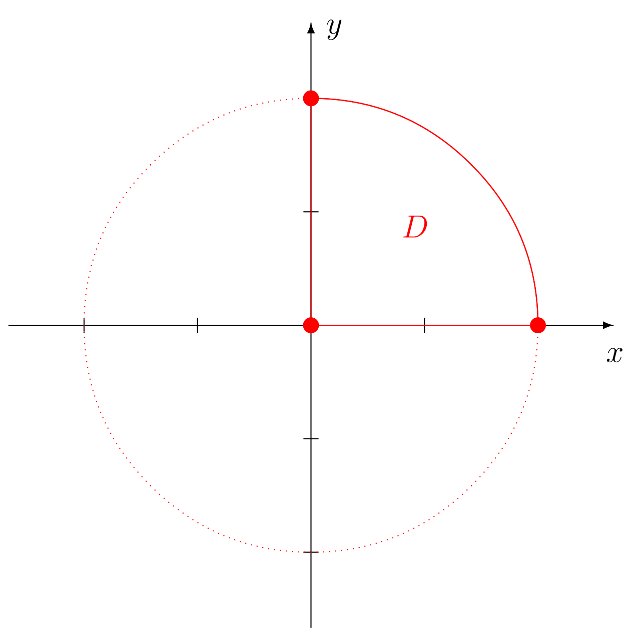
handelt es sich um den im abgeschlossenen 1. Quadranten liegenden Teil der Einheitskreisscheibe; damit ist eine D abgeschlossene und beschränkte, mithin kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Folglich besitzt die (als Komposition des Sinus und einer Polynomfunktion) insbesondere stetige Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sin(xy),$$

nach dem Satz von Weierstraß globale Extremstellen, so daß

- sowohl die Menge M_1 der globalen Maxima von f, also aller $(a, b) \in D$ mit $f(x, y) \leq f(a, b)$ für alle $(x, y) \in D$,
- als auch die Menge M_2 der globalen Minima von f, also aller $(a, b) \in D$ mit $f(a, b) \leq f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D$,

nicht leer ist. Zur Bestimmung der globalen Extremstellen (a, b), also der Mengen M_1 und M_2, treffen wir die folgende Fallunterscheidung:



- Der Punkt (a, b) liegt auf dem Rand ∂D von D:
  - für die Punkte der unteren Strecke gilt $(t, 0)$ mit $t \in [0; 1]$ und damit
    $$f(t, 0) = \sin(t \cdot 0) = \sin 0 = 0.$$
  - für die Punkte der linken Strecke gilt $(0, t)$ mit $t \in [0; 1]$ und damit
    $$f(0, t) = \sin(0 \cdot t) = \sin 0 = 0.$$
  - für die Punkte (x, y) auf dem Viertelkreisbogen betrachten wir die Polarkoordinaten $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$ mit $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ und erhalten
    $$f(x, y) = \sin(xy) = \sin(\cos\varphi \cdot \sin\varphi) = \sin\left(\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right);$$
    die differenzierbare Hilfsfunktion
    $$h : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = \sin\left(\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right),$$
    kann Extrema nur in den Randpunkten 0 und $\frac{\pi}{2}$ des Definitionsintervalls $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ und in den Nullstellen der Ableitung h' annehmen, wegen
    $$h'(\varphi) = \underbrace{\cos\underbrace{\left(\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right)}_{\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}}_{>0} \cdot \cos(2\varphi) \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$
    für $\cos(2\varphi) = 0$, also für $2\varphi = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Damit ergeben sich als Kandidaten für globale Extremstellen
    * für $\varphi = 0$ den Punkt $(1, 0)$ mit $f(1, 0) = 0$,
    * für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ den Punkt $(0, 1)$ mit $f(0, 1) = 0$ und
    * für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ den Punkt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ mit $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin\frac{1}{2}$.
- Der Punkt (a, b) liegt im Innern $\mathring{D}$ von D; da f (als Komposition des Sinus und einer Polynomfunktion) insbesondere partiell differenzierbar ist mit
  $$\partial_x f(x, y) = \cos(xy) \cdot y \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x, y) = \cos(xy) \cdot x$$
  für alle $(x, y) \in \mathring{D}$, muß dann (a, b) eine kritische Stelle von f sein, es muß also $\operatorname{grad} f(a, b) = (0, 0)$ gelten. Wegen $0 < a < 1$ und $0 < b < 1$ ist auch $0 < ab < 1$ und damit, da der Cosinus auf $[0; 1]$ streng monoton fällt, aber
  $$\partial_x f(a, b) = \underbrace{\cos(ab)}_{>\cos 1>0} \cdot \underbrace{b}_{>0} > 0 \quad \text{bzw.} \quad \partial_y f(a, b) = \underbrace{\cos(ab)}_{>\cos 1>0} \cdot \underbrace{a}_{>0} > 0.$$

Damit nimmt die Funktion f

- im Punkt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ihr globales Maximum $\sin\frac{1}{2}$ an, es ist also
  $$M_1 = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\},$$
- in den Punkten $(t, 0)$ und $(0, t)$ mit $t \in [0; 1]$ ihr globales Minimum 0 an, es ist also
  $$M_2 = \{(t, 0) \mid t \in [0; 1]\} \cup \{(0, t) \mid t \in [0; 1]\}.$$

10. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x+y) \cdot e^{x\,y},$$

ist als Produkt einer linearen Funktion und einer Exponentialfunktion partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_x f(x,y) = 1 \cdot e^{x\,y} + (x+y) \cdot (e^{x\,y} \cdot y) = \left(1 + x\,y + y^2\right) e^{x\,y}$$

sowie

$$\partial_y f(x,y) = 1 \cdot e^{x\,y} + (x+y) \cdot (e^{x\,y} \cdot x) = \left(1 + x\,y + x^2\right) e^{x\,y}.$$

Für einen kritischen Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ müßte

$$\partial_x f(x,y) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) = 0,$$

wegen $e^{xy} > 0$ also

$$1 + x\,y + y^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad 1 + x\,y + x^2 = 0,$$

gelten, woraus

$$y^2 = -\,(1 + x\,y) = x^2, \qquad \text{also} \qquad y = x \;\text{ oder }\; y = -x,$$

und damit für $y = x$ in $1 + 2\,x^2 = 0$ sowie für $y = -x$ in $1 = 0$ jeweils ein Widerspruch entsteht. Folglich kann f keine kritischen Punkte besitzen.

b) Die abgeschlossene Kreisscheibe

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\right\}$$

mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius $\sqrt{2}$ ist kompakt, so daß die (als Produkt stetiger Funktionen) stetige Funktion f nach dem Satz von Weierstraß auf K an mindestens einer Stelle p das globale Minimum $f(p)$ und an mindestens einer Stelle q das globale Maximum $f(q)$ annimmt. Da f gemäß a) partiell differenzierbar ohne kritische Punkte ist, liegen diese Extremstellen auf dem Rand von K, also auf der Kreislinie

$$\partial K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\right\}$$

mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius $\sqrt{2}$. Wir betrachten für den Punkt $(x,y) \in \partial K$ die Darstellung $x = \sqrt{2}\cos\varphi$ und $y = \sqrt{2}\sin\varphi$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ in Polarkoordinaten und erhalten

$$\begin{aligned} f(x,y) = (x+y) \cdot e^{x\,y} &= (\sqrt{2}\cos\varphi + \sqrt{2}\sin\varphi) \cdot e^{(\sqrt{2}\cos\varphi)(\sqrt{2}\sin\varphi)} \\ &= \sqrt{2}\,(\cos\varphi + \sin\varphi) \cdot e^{2\cos\varphi\sin\varphi}; \end{aligned}$$

als Extremstellen der differenzierbaren Hilfsfunktion

$$h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = \sqrt{2}\,(\cos\varphi + \sin\varphi) \cdot e^{2\cos\varphi\sin\varphi},$$

kommen neben den beiden Randpunkten 0 und 2π von $[0, 2\pi]$ nur die Nullstellen der Ableitung

$$\begin{aligned} h'(\varphi) &= \sqrt{2}\,(-\sin\varphi + \cos\varphi)\cdot e^{2\cos\varphi\sin\varphi} + \\ &\ \sqrt{2}\,(\cos\varphi + \sin\varphi)\cdot\left(e^{2\cos\varphi\sin\varphi}\cdot 2\,(-\sin\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\cos\varphi)\right) \\ &= \sqrt{2}\,(\cos\varphi - \sin\varphi)\cdot\underbrace{e^{2\cos\varphi\sin\varphi}}_{>0}\cdot\underbrace{\left(1 + 2\,(\cos\varphi + \sin\varphi)^2\right)}_{\geq 1}, \end{aligned}$$

also $\varphi \in [0, 2\pi]$ mit $\cos\varphi = \sin\varphi$, und damit $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ in Frage, so daß sich die globalen Extrema von f unter den Punkten

$$\underbrace{(\sqrt{2}, 0)}_{\text{für } \varphi = 0 \text{ und } \varphi = 2\pi} \qquad \text{sowie} \qquad \underbrace{(1,1)}_{\text{für } \varphi = \frac{\pi}{4}} \qquad \text{und} \qquad \underbrace{(-1,-1)}_{\text{für } \varphi = \frac{5\pi}{4}}$$

finden. Die Wertetabelle

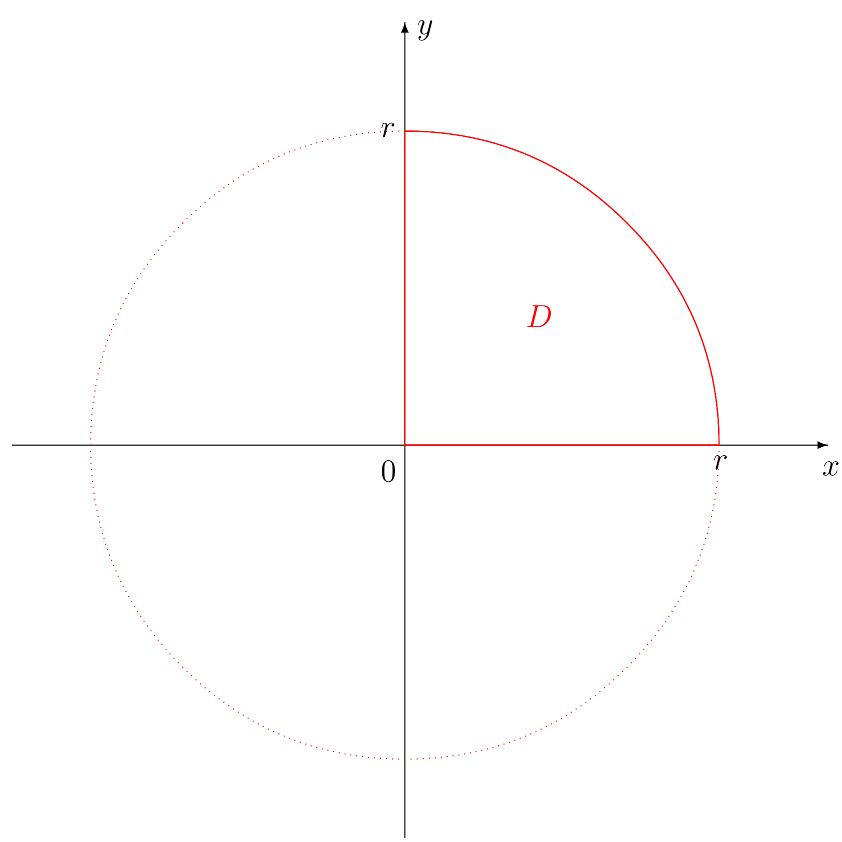
(x, y)	$(\sqrt{2}, 0)$	$(1, 1)$	$(-1, -1)$
$f(x, y)$	$\sqrt{2}$	$2\,e$	$-2\,e$

zeigt, daß f in $p = (-1, -1)$ das globale Minimum $f(p) = -2\,e$ sowie in $q = (1, 1)$ das globale Maximum $f(q) = 2\,e$ annimmt.

11. Für eine fest gewählte reelle Zahl $r > 0$ beinhaltet die gegebene Menge

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 \leq r^2\right\}$$

genau diejenigen Punkte der abgeschlossenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq r^2$ mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$ und dem Radius r, welche im abgeschlossenen 1. Quadranten $x \geq 0$ und $y \geq 0$ liegen; damit ergibt sich folgende Skizze:



Damit ist D eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, mithin kompakt. Folglich besitzt die (als Polynomfunktion insbesondere) stetige Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\,y\left(x^2 + y^2 - r^2\right),$$

nach dem Satz von Weierstraß (mindestens) eine globale Minimalstelle und (mindestens) eine globale Maximalstelle. Dabei gilt für alle $(x,y) \in D$

$$f(x,y) = \underbrace{x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{y}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\left(x^2 + y^2 - r^2\right)}_{\leq 0} \leq 0$$

mit

$$f(x,y) = 0 \iff x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = r^2;$$

folglich besitzt die Funktion f genau in den Randpunkten von D ihre globalen Maximalstellen. Eine globale Minimalstelle $(p,q) \in D$ von f muß demnach im Innern

$$\overset{\circ}{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0 \text{ und } x^2 + y^2 < r^2\right\}$$

des Viertelkreises D liegen; da f (als Polynomfunktion insbesondere) partiell differenzierbar ist, kommen dabei hierfür nur kritische Stellen von f in Frage. Für alle $(x,y) \in \overset{\circ}{D}$ gilt

$$f(x,y) = x\,y\left(x^2 + y^2 - r^2\right) = x^3 y + x\,y^3 - r^2 x\,y$$

und damit

$$\partial_x f(x,y) = 3\,x^2 y + y^3 - r^2 y \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) = x^3 + 3\,x\,y^2 - r^2 x,$$

weswegen wir

$$\partial_x f(x,y) = 0 \iff (3\,x^2 + y^2 - r^2)\,y = 0 \underset{y>0}{\iff} 3\,x^2 + y^2 = r^2$$

und

$$\partial_y f(x,y) = 0 \iff (x^2 + 3\,y^2 - r^2)\,x = 0 \underset{x>0}{\iff} x^2 + 3\,y^2 = r^2$$

erhalten. Für eine globale Minimalstelle $(p,q) \in \overset{\circ}{D}$ von f muß also notwendig

$$3\,p^2 + q^2 = r^2 \qquad \text{und} \qquad p^2 + 3\,q^2 = r^2,$$

also

$$0 = r^2 - r^2 = \left(3\,p^2 + q^2\right) - \left(p^2 + 3\,q^2\right) = 2\,p^2 - 2\,q^2 = 2 \cdot \underbrace{(p+q)}_{>0} \cdot (p-q),$$

damit $p - q = 0$ bzw. $p = q$, und schließlich

$$4\,p^2 = r^2 \qquad \text{bzw.} \qquad p^2 = \frac{r^2}{4},$$

also $p = \frac{r}{2}$ und $q = \frac{r}{2}$ gelten. Folglich besitzt die Funktion f im Punkt $(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}) \in \overset{\circ}{D}$ ihre globale Minimalstelle, und es gilt

$$f\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right) = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot \left(\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 - r^2\right) = \frac{r^2}{4} \cdot \left(-\frac{r^2}{2}\right) = -\frac{r^4}{8}.$$

12. a) Die gegebene Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x_1,x_2)=\begin{cases} x_1x_2\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}, & \text{für } (x_1,x_2)\neq(0,0),\\ 0, & \text{für } (x_1,x_2)=(0,0).\end{cases}$$

ist zunächst für alle $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ partiell differenzierbar, und aus

$$f(x_1,x_2)=x_1x_2\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}=\frac{x_1^3\,x_2-x_1\,x_2^3}{x_1^2+x_2^2}$$

ergibt sich mit der Quotientenregel

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x_1,x_2) &= \frac{(x_1^2+x_2^2)(3\,x_1^2\,x_2-x_2^3)-(x_1^3\,x_2-x_1\,x_2^3)\,(2\,x_1)}{(x_1^2+x_2^2)^2}\\ &= \frac{(3\,x_1^4\,x_2-x_1^2\,x_2^3+3\,x_1^2\,x_2^3-x_2^5)-(2\,x_1^4\,x_2-2\,x_1^2\,x_2^3)}{(x_1^2+x_2^2)^2}\\ &= \frac{x_1^4\,x_2+4\,x_1^2\,x_2^3-x_2^5}{(x_1^2+x_2^2)^2}\end{aligned}$$

sowie entsprechend

$$\partial_2 f(x_1,x_2)=\frac{x_1^5-4\,x_1^3\,x_2^2-x_1\,x_2^4}{(x_1^2+x_2^2)^2}.$$

Ferner sind die beiden Funktionen

$$g_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g_1(x_1)=f(x_1,0)=0,$$

und

$$g_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g_2(x_2)=f(0,x_2)=0,$$

differenzierbar, und es ergibt sich

$$\partial_1 f(0,0)=g_1'(0)=0\quad\text{und}\qquad \partial_2 f(0,0)=g_2'(0)=0.$$

b) Die beiden partiellen Ableitungen

$$\partial_1 f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad \partial_1 f(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{x_1^4\,x_2+4\,x_1^2\,x_2^3-x_2^5}{(x_1^2+x_2^2)^2}, & \text{für } (x_1,x_2)\neq(0,0),\\ 0, & \text{für } (x_1,x_2)=(0,0).\end{cases}$$

und

$$\partial_2 f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad \partial_2 f(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{x_1^5-4\,x_1^3\,x_2^2-x_1\,x_2^4}{(x_1^2+x_2^2)^2}, & \text{für } (x_1,x_2)\neq(0,0),\\ 0, & \text{für } (x_1,x_2)=(0,0).\end{cases}$$

sind zunächst für alle $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ partiell differenzierbar. Wegen

$$\frac{\partial_1 f(x_1,0)-\partial_1 f(0,0)}{x_1-0}=\frac{0-0}{x_1}=0\ \xrightarrow[x_1\to 0]{}\ 0$$

und

$$\frac{\partial_1 f(0,x_2)-\partial_1 f(0,0)}{x_2-0}=\frac{-x_2-0}{x_2}=-1\ \xrightarrow[x_2\to 0]{}\ -1$$

ergibt sich

$$\partial_1\partial_1 f(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_2\partial_1 f(0,0) = -1,$$

und wegen

$$\frac{\partial_2 f(x_1,0) - \partial_2 f(0,0)}{x_1 - 0} = \frac{x_1 - 0}{x_1} = 1 \underset{x_1\to 0}{\longrightarrow} 1$$

und

$$\frac{\partial_2 f(0,x_2) - \partial_2 f(0,0)}{x_2 - 0} = \frac{0 - 0}{x_2} = 0 \underset{x_2\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ergibt sich

$$\partial_1\partial_2 f(0,0) = 1 \qquad \text{und} \qquad \partial_2\partial_2 f(0,0) = 0;$$

insbesondere gilt

$$\partial_1\partial_2 f(0,0) = 1 \neq -1 = \partial_2\partial_1 f(0,0).$$

c) Für alle $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x_1,x_2) - f(0,0)| &= \left| x_1\, x_2 \, \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - 0 \right| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \frac{|x_1^2 - x_2^2|}{x_1^2 + x_2^2} \leq \\ &\leq |x_1| \cdot |x_2| \cdot \frac{x_2^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = \underbrace{|x_1|}_{\to 0} \cdot \underbrace{|x_2|}_{\to 0} \underset{(x_1,x_2)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0; \end{aligned}$$

damit gilt

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2) = 0 = f(0,0),$$

also ist f stetig an der Stelle $(0,0)$.