

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

5. a) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1 e^{-x_2},$$

ist partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = e^{-x_2}$$

und

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = x_1 (e^{-x_2} \cdot (-1)) = -x_1 e^{-x_2}$$

für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

b) Die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2) \cdot \cos(x_1 - x_2),$$

ist partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \partial_1 g(x_1, x_2) &= \cos(x_1 + x_2) \cdot \cos(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2) \cdot (-\sin(x_1 - x_2)) \\ &= \cos(x_1 + x_2) \cdot \cos(x_1 - x_2) - \sin(x_1 + x_2) \cdot \sin(x_1 - x_2) \\ &= \cos((x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)) \\ &= \cos(2x_1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_2 g(x_1, x_2) &= \cos(x_1 + x_2) \cdot \cos(x_1 - x_2) + \\ &\quad + \sin(x_1 + x_2) \cdot (-\sin(x_1 - x_2) \cdot (-1)) \\ &= \cos(x_1 + x_2) \cdot \cos(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2) \cdot \sin(x_1 - x_2) \\ &= \cos((x_1 + x_2) - (x_1 - x_2)) \\ &= \cos(2x_2) \end{aligned}$$

für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

c) Die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{x_1^2 + 1}{x_2^2 + 1}} = (x_1^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot (x_2^2 + 1)^{-\frac{1}{2}},$$

ist partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\partial_1 h(x_1, x_2) &= \left(\frac{1}{2} (x_1^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x_1) \right) \cdot (x_2^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= x_1 \cdot (x_1^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x_2^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x_1}{\sqrt{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_2 h(x_1, x_2) &= (x_1^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot (x_2^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x_2) \right) = \\ &= -x_2 \cdot (x_1^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot (x_2^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{x_2}{x_2^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{x_1^2 + 1}{x_2^2 + 1}}\end{aligned}$$

für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

d) Die Funktion

$$k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad k(x_1, x_2) = (x_1^2 + 1)^{-x_2} = e^{-x_2 \ln(x_1^2 + 1)},$$

ist partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 k(x_1, x_2) = -x_2 (x_1^2 + 1)^{-x_2 - 1} \cdot (2x_1) = -2x_1 x_2 (x_1^2 + 1)^{-x_2 - 1}$$

(über die Ableitung als Potenzfunktion) oder

$$\begin{aligned}\partial_1 k(x_1, x_2) &= e^{-x_2 \ln(x_1^2 + 1)} \cdot \left(-x_2 \cdot \frac{1}{x_1^2 + 1} \cdot (2x_1) \right) = \\ &= -e^{-x_2 \ln(x_1^2 + 1)} \cdot \frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + 1} = -(x_1^2 + 1)^{-x_2} \cdot \frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + 1}\end{aligned}$$

und

$$\partial_2 k(x_1, x_2) = (x_1^2 + 1)^{-x_2} \ln(x_1^2 + 1) \cdot (-1) = -(x_1^2 + 1)^{-x_2} \cdot \ln(x_1^2 + 1)$$

(über die Ableitung als Exponentialfunktion) oder

$$\begin{aligned}\partial_2 k(x_1, x_2) &= e^{-x_2 \ln(x_1^2 + 1)} \cdot (-\ln(x_1^2 + 1)) = \\ &= -e^{-x_2 \ln(x_1^2 + 1)} \cdot \ln(x_1^2 + 1) = -(x_1^2 + 1)^{-x_2} \cdot \ln(x_1^2 + 1).\end{aligned}$$

6. a) Für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt

$$\begin{aligned}|f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{|\sin(x^3 + y^3)|}{x^2 + y^2} \stackrel{|\sin t| \leq |t|}{\leq} \\ &\leq \frac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} = \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} + \frac{|y|^3}{x^2 + y^2} = \\ &= \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{\leq 1} \cdot |x| + \underbrace{\frac{y^2}{x^2 + y^2}}_{\leq 1} \cdot |y| \leq |x| + |y| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 + 0 = 0;\end{aligned}$$

damit gilt

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0),$$

weswegen f im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

- b) Wir betrachten den Differenzenquotienten der Funktion f im Punkt $(0,0)$ in x -Richtung

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{\frac{\sin(h^3+0^3)}{h^2+0^2} - 0}{h} = \frac{\sin h^3}{h^3}$$

für $h \neq 0$ und bestimmen seinen Grenzwert für $h \rightarrow 0$ mit Hilfe der Regel von de l'Hospital. Wegen

$$\frac{(\cos h^3) \cdot (3h^2)}{3h^2} = \cos h^3 \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos 0 = 1$$

existiert auch der Grenzwert

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^3}{h^3} \stackrel{\text{L'H}}{\underset{„0/0“}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h^3) \cdot (3h^2)}{3h^2} = 1.$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich entsprechend

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 1.$$

Damit ist die Funktion f im Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar ist mit

$$\text{grad } f(0,0) = (\partial_x f(0,0), \partial_y f(0,0)) = (1,1).$$

7. a) Die Einheitskreisscheibe

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ist eine sowohl abgeschlossene als auch beschränkte und damit kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$; darüber hinaus ist die Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 - 3xy^2,$$

als Polynomfunktion insbesondere stetig. Nach dem Satz von Weierstraß besitzt damit die stetige Funktion f auf der kompakten Menge D eine globale Minimalstelle $(p_1, q_1) \in D$ und eine globale Maximalstelle $(p_2, q_2) \in D$, für alle $(x,y) \in D$ gilt also $f(p_1, q_1) \leq f(x,y) \leq f(p_2, q_2)$.

- b) Die Polynomfunktion f ist insbesondere partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in D$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 3y^2 \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x,y) = -6xy.$$

Damit kommen für globale Extremstellen $(a,b) \in D$ nur die beiden folgenden Fälle in Frage:

- Der Punkt (a, b) liegt auf dem Rand ∂D von D ; wir betrachten für die Punkte der Einheitskreislinie ∂D die Darstellung $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ in Polarkoordinaten mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und erhalten

$$f(\cos \varphi, \sin \varphi) = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \underbrace{\sin^2 \varphi}_{=1-\cos^2 \varphi} = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi.$$

Die differenzierbare Hilfsfunktion

$$h : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi,$$

kann ihre Extremwerte in den Randpunkten $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ ihres Definitionsintervalls oder in den Nullstellen ihrer Ableitung

$$h'(\varphi) = 4(3 \cos^2 \varphi \cdot (-\sin \varphi)) - 3(-\sin \varphi) = -12 \sin \varphi (\cos^2 \varphi - \tfrac{1}{4}),$$

also für $\sin \varphi = 0$ oder $\cos \varphi = \pm \frac{1}{2}$ annehmen; damit kommen für φ nur die Werte $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ und 2π , also für (a, b) die Punkte $(\pm 1, 0)$ sowie $(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})$ und $(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})$ in Frage.

- Der Punkt (a, b) liegt im Innern $\overset{\circ}{D}$ von D ; dann ist aber (a, b) ein kritischer Punkt von f , es gilt also $\text{grad } f(a, b) = (0, 0)$. Aus $\partial_1 f(a, b) = 3a^2 - 3b^2 = 0$ folgt zunächst $a^2 = b^2$, also $a = \pm b$, woraus sich mit $\partial_2 f(a, b) = -6ab = 0$ dann $\mp 6b^2 = 0$, also $b = 0$ und $a = 0$, ergibt; hier ist damit $(a, b) = (0, 0)$.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(a, b)	$(1, 0)$	$(-1, 0)$	$(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})$	$(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})$	$(0, 0)$
$f(a, b)$	1	-1	-1	1	0

erkennt man, daß f in $(-1, 0)$ sowie $(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})$ globale Minimalstellen sowie in $(1, 0)$ sowie $(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})$ globale Maximalstellen besitzt.

8. a) Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| \frac{xy}{|x| + |y|} - 0 \right| = \frac{|x| \cdot |y|}{|x| + |y|} = \\ &= \underbrace{\frac{|x|}{|x| + |y|}}_{\leq 1} \cdot |y| \leq |y| \longrightarrow 0 \quad \text{für } (x, y) \rightarrow (0, 0); \end{aligned}$$

damit gilt insbesondere

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0),$$

weswegen f stetig in $(0, 0)$ ist.

- b) Wir betrachten zuerst die partielle Differenzierbarkeit von f in x -Richtung und treffen hierfür die folgende Fallunterscheidung:

- Die Betragsfunktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = |t|$, ist für alle $t \neq 0$ differenzierbar mit $h'(t) = \text{sign}(t)$. Damit existiert die partielle Ableitung $\partial_x f(x, y)$ zumindest in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$ mit

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= \frac{(|x| + |y|) \cdot y - xy \cdot \text{sign}(x)}{(|x| + |y|)^2} = \\ &= \frac{|x|y + |y|y - |x|y}{(|x| + |y|)^2} = \frac{|y|y}{(|x| + |y|)^2}.\end{aligned}$$

- In den Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x = 0$ gilt für alle $h \neq 0$

$$\frac{f(0 + h, y) - f(0, y)}{h} = \frac{1}{h} \cdot f(h, y) = \frac{1}{h} \cdot \frac{hy}{|h| + |y|} = \frac{y}{|h| + |y|},$$

so daß sich

$$\begin{aligned}\partial_x f(0, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, y) - f(0, y)}{h} = \\ &= \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y}{|h| + y} = \frac{y}{0 + y} = 1, & \text{für } y > 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y}{|h| + y} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0, & \text{für } y = 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y}{|h| - y} = \frac{y}{0 - y} = -1, & \text{für } y < 0, \end{cases}\end{aligned}$$

zusammenfassend also

$$\partial_x f(0, y) = \text{sign}(y)$$

ergibt.

Damit ist f in x -Richtung partiell differenzierbar mit

$$\partial_x f(x, y) = \begin{cases} \frac{|y|y}{(|x| + |y|)^2}, & \text{für } x \neq 0, \\ \text{sign}(y), & \text{für } x = 0; \end{cases}$$

aus Symmetriegründen ist dann f auch in y -Richtung partiell differenzierbar mit

$$\partial_y f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|x}{(|x| + |y|)^2}, & \text{für } y \neq 0, \\ \text{sign}(x), & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

Insgesamt ist f partiell differenzierbar mit

$$\text{grad } f(x, y) = (\partial_x f(x, y), \partial_y f(x, y))$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- c) Wir betrachten das Verhalten der partiellen Ableitung $\partial_x f$ der Funktion f in x -Richtung auf der y -Achse $x = 0$ und erhalten für alle $t > 0$

$$\partial_x f(0, t) = \text{sign}(t) \underset{t > 0}{=} 1$$

und damit

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \partial_x f(0, t) = 1 \neq 0 = \partial_x f(0, 0);$$

damit ist $\partial_x f$ an der Stelle $(0, 0)$ unstetig. Folglich ist f in $(0, 0)$ auch nicht stetig partiell differenzierbar.