

## Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1 e^{-x_2},$$

ist als Produkt und Verkettung von Monomfunktionen sowie der Exponentialfunktion selbst stetig; genauer gilt: die beiden Monomfunktionen

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x_1, x_2) = x_1, \quad \text{und} \quad f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x_1, x_2) = -x_2,$$

sind stetig, und wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion ist auch die Verknüpfung

$$f_3 = \exp \circ f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x_1, x_2) = e^{-x_2},$$

und damit schließlich das Produkt

$$f = f_1 \cdot f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1 e^{-x_2},$$

stetig.

b) Die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \left| \sqrt{x_1^2 + 3} - x_2 \right|,$$

ist als Verknüpfung und Differenz von Monomfunktionen sowie der Wurzelfunktion und des Absolutbetrags selbst stetig; genauer gilt: die beiden Polynomfunktionen

$$g_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 3, \quad \text{und} \quad g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_2(x_1, x_2) = x_2,$$

sind stetig, und wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion  $g_3 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_3(t) = \sqrt{t}$ , ist auch die Verknüpfung

$$g_4 = g_3 \circ g_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_4(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + 3},$$

sowie die Differenz

$$g_5 = g_4 - g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_5(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + 3} - x_2,$$

stetig, woraus sich wegen der Stetigkeit der Betragsfunktion  $g_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_6(t) = |t|$ , ergibt, daß auch die Verknüpfung

$$g = g_6 \circ g_5 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \left| \sqrt{x_1^2 + 3} - x_2 \right|,$$

stetig ist.

c) Die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0), \end{cases}$$

ist an allen Stellen  $a \neq (0, 0)$  als Quotient und Verkettung von Polynomfunktionen sowie der Wurzelfunktion selbst stetig. Wegen

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - 0}{\sqrt{t^2 + 0^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{|t|} = \lim_{t > 0} 1 = 1 \neq h(0, 0)$$

ist  $h$  an der Stelle  $a = (0, 0)$  unstetig.

d) Die Funktion

$$k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad k(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

ist zunächst an allen Stellen  $a \neq (0, 0)$  als Quotient und Verkettung von Polynomfunktionen sowie der Wurzelfunktion selbst stetig. Darüber hinaus gilt für alle  $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$

$$|k(x_1, x_2) - k(0, 0)| = \frac{|x_1^2 - x_2^2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \leq \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \sqrt{\underbrace{x_1^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{x_2^2}_{\rightarrow 0}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

und damit insbesondere  $k(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$ ; also ist  $k$  auch an der Stelle  $a = (0, 0)$  stetig.

2. Die Definitionsmenge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \leq x \leq \pi \text{ und } 0 \leq y \leq \pi\} = [-\pi; \pi] \times [0; \pi]$$

ist das abgeschlossene Rechteck mit den Eckpunkten  $(-\pi; 0)$ ,  $(\pi; 0)$ ,  $(\pi, \pi)$  und  $(-\pi, \pi)$ ; insbesondere ist  $D$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ . Damit besitzt die (als Summe zweier trigonometrischer Funktionen insbesondere) stetige Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \cos x + \sin y,$$

nach dem Satz von Weierstraß mindestens ein globales Minimum und mindestens ein globales Maximum, es gibt also  $(a, b)$  und  $(c, d) \in D$  mit

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d)$$

für alle  $(x, y) \in D$ . Wegen

$$f(x, y) = \cos x + \sin y \leq 1 + 1 = 2$$

mit

$$f(x, y) = 2 \iff \cos x = 1 \text{ und } \sin y = 1 \iff x = 0 \text{ und } y = \frac{\pi}{2}$$

sowie

$$f(x, y) = \cos x + \sin y \geq -1 + 0 = -1$$

mit

$$\begin{aligned} f(x, y) = -1 &\iff \cos x = -1 \text{ und } \sin y = 0 \iff \\ &\iff x \in \{-\pi, \pi\} \text{ und } y \in \{0, \pi\} \end{aligned}$$

für alle  $(x, y) \in D$  besitzt  $f$  in Eckpunkten  $(-\pi; 0)$ ,  $(\pi; 0)$ ,  $(\pi, \pi)$  und  $(-\pi, \pi)$  von  $D$  globale Minimalstellen sowie im Mittelpunkt  $(0, \frac{\pi}{2})$  eine globale Maximalstelle.

### 3. Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x - y^2,$$

ist (als Polynomfunktion) stetig.

a) Die Einheitskreislinie

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kompakt, und nach dem Satz von Weierstraß nimmt  $f$  auf  $D_1$  ein Minimum  $(a, b) \in D_1$  und ein Maximum  $(c, d) \in D_1$  an, es gilt also

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d) \quad \text{für alle } (x, y) \in D_1.$$

Mit Hilfe der Polarkoordinaten  $x = \cos \varphi$  und  $y = \sin \varphi$  mit  $\varphi \in [0, 2\pi]$  erhalten wir

$$f(x, y) = x - y^2 = \cos \varphi - \sin^2 \varphi.$$

Die stetige und differenzierbare Hilfsfunktion

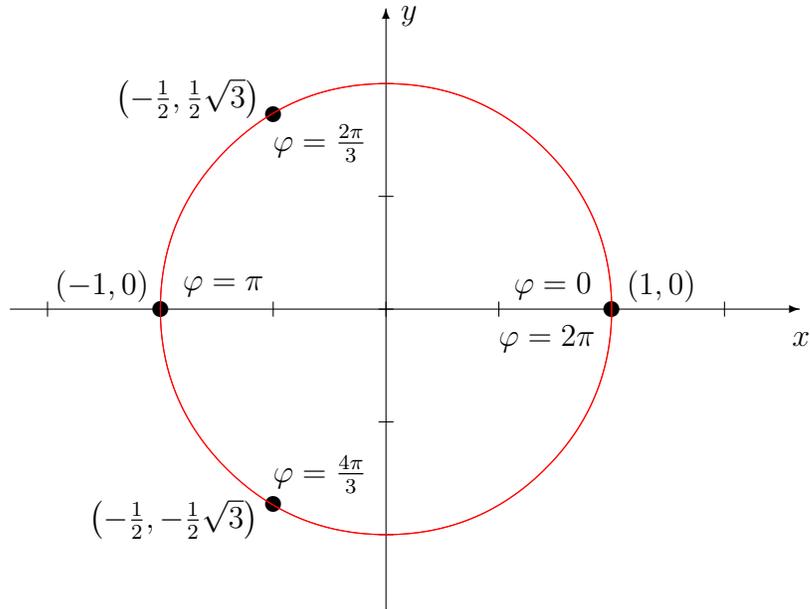
$$h : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = \cos \varphi - \sin^2 \varphi,$$

mit

$$h'(\varphi) = -\sin \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi = -\sin \varphi (1 + 2 \cos \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in [0, 2\pi]$$

besitzt globale Extrema, wofür nur die Randpunkte 0 und  $2\pi$  des Definitionsintervalls  $[0, 2\pi]$  sowie die Nullstellen der Ableitung  $h'$  in Frage kommen; dabei ist

$$\begin{aligned} h'(\varphi) = 0 &\iff -\sin \varphi \cdot (1 + 2 \cos \varphi) = 0 \iff \\ &\iff \sin \varphi = 0 \text{ oder } \cos \varphi = -\frac{1}{2} \iff \varphi \in \left\{ 0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi \right\}. \end{aligned}$$



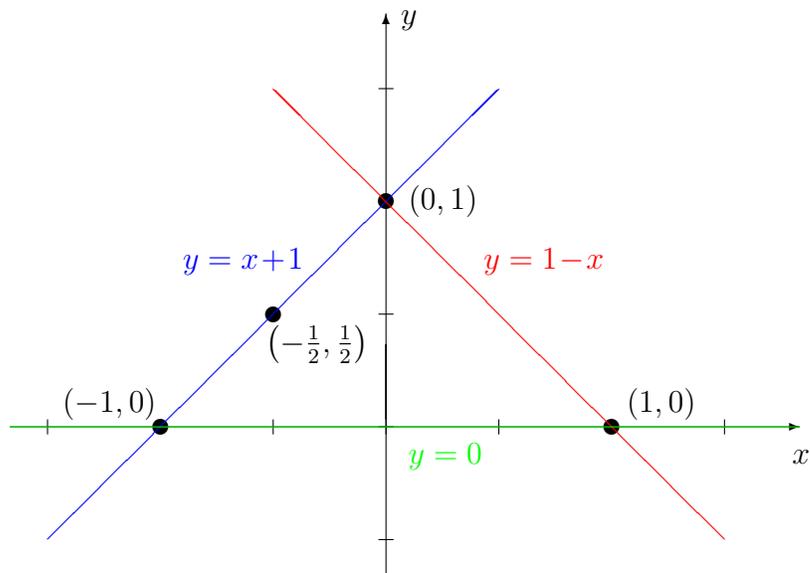
Die Wertetabelle

$\varphi$	$0$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$	$\frac{4\pi}{3}$	$2\pi$
$h(\varphi)$	$1$	$-\frac{5}{4}$	$-1$	$-\frac{5}{4}$	$1$

zeigt, daß  $f$  in den Punkten  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$  und  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$  das globale Minimum  $-\frac{5}{4}$  sowie in  $(1, 0)$  das globale Maximum  $1$  annimmt; da  $D_1$  überdies zusammenhängend ist, gilt  $W_1 = [-\frac{5}{4}, 1]$ .

- b) Das Dreieck  $D_2 \in \mathbb{R}^2$  mit den Eckpunkten  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  ist kompakt, und nach dem Satz von Weierstraß nimmt  $f$  auf  $D_2$  ein Minimum  $(a, b) \in D_1$  und ein Maximum  $(c, d) \in D_1$  an, es gilt also

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d) \quad \text{für alle } (x, y) \in D_2.$$



Wir betrachten die drei Dreiecksseiten von  $D_2$ :

- Für die Punkte der linken Kathete gilt  $(t, t + 1)$  mit  $t \in [-1, 0]$ , also

$$f(t, t + 1) = t - (t + 1)^2 = -t^2 - t - 1 = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4};$$

als Extrema kommen also  $(-1, 0)$ ,  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  und  $(0, 1)$  in Frage.

- Für die Punkte der rechten Kathete gilt  $(t, 1 - t)$  mit  $t \in [0, 1]$ , also

$$f(t, 1 - t) = t - (1 - t)^2 = -t^2 + 3t - 1 = -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4};$$

als Extrema kommen also  $(0, 1)$  und  $(1, 0)$  in Frage.

- Für die Punkte der Hypotenuse gilt  $(t, 0)$  mit  $t \in [-1, 1]$ , also

$$f(t, 0) = t - 0^2 = t;$$

als Extrema kommen also  $(-1, 0)$  und  $(1, 0)$  in Frage.

Die Wertetabelle

$(x, y)$	$(-1, 0)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(0, 1)$	$(1, 0)$
$f(x, y)$	$-1$	$-\frac{3}{4}$	$-1$	$1$

zeigt, daß  $f$  in den Punkten  $(-1, 0)$  und  $(0, 1)$  das globale Minimum  $-1$  sowie im Punkt  $(1, 0)$  das globale Maximum  $1$  annimmt; da  $D_2$  überdies zusammenhängend ist, gilt  $W_1 = [-1, 1]$ .

4. Wir betrachten eine Kurve  $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , mit

$$W_\varphi \subseteq [-1, 1] \times [-1, 1] \quad \text{sowie} \quad \varphi(-1) = (-1, -1) \quad \text{und} \quad \varphi(1) = (1, 1);$$

damit liegt die Bildmenge  $W_\varphi$  von  $\varphi$  im abgeschlossenen Quadrat  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  mit den Eckpunkten  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$  und verbindet dabei die beiden gegenüberliegenden Ecken  $\varphi(-1) = (-1, -1)$  und  $\varphi(1) = (1, 1)$ .

Aus der Stetigkeit der gegebenen Funktion  $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  und der Kurve  $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ergibt sich nun die Stetigkeit ihrer Verknüpfung

$$h = f \circ \varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = f(\varphi(t));$$

wegen

$$h(-1) = f(\varphi(-1)) = f(-1, -1) = -1 < 0$$

und

$$h(1) = f(\varphi(1)) = f(1, 1) = 1 > 0$$

existiert damit nach dem Nullstellensatz ein  $\xi \in ]-1, 1[$  mit  $h(\xi) = 0$ . Folglich ist aber  $p = \varphi(\xi)$  ein Punkt in der Bildmenge  $W_\varphi$  der Kurve  $\varphi$ , insbesondere also im abgeschlossenen Quadrat  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , mit

$$f(p) = f(\varphi(\xi)) = h(\xi) = 0.$$

Um die Existenz von unendlich vielen Nullstellen der Funktion  $f$  nachzuweisen, konstruieren wir nun im folgenden geeignete Kurven; sei dazu  $a \in ]-1, 1[$  ein reeller Parameter. Die Kurve

$$\varphi_a : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_a(t) = \begin{cases} (t, (1+a)t + a), & \text{für } -1 \leq t \leq 0, \\ (t, (1-a)t + a), & \text{für } 0 < t \leq 1, \end{cases}$$

beschreibt den Streckenzug  $P_a$  zwischen den drei Punkten  $\varphi_a(-1) = (-1, -1)$ ,  $\varphi_a(0) = (0, a)$  und  $\varphi_a(1) = (1, 1)$ ; damit besitzt  $f$  auf  $P_a$  eine im Innern des Quadrats liegende Nullstelle  $p_a$ . Nachdem aber zwei Streckenzüge  $P_a$  und  $P_{a'}$  für  $a \neq a'$  nur die beiden Eckpunkte  $(-1, -1)$  und  $(1, 1)$  gemeinsam haben, ergibt sich  $p_a \neq p_{a'}$ ; folglich besitzt die Funktion  $f$  aber unendliche viele Nullstellen.

