MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/17
Klausur
18.02.2017

Klausur zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2 - x + y,$$

ist als Polynomfunktion beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt zum einen

$$\partial_x f(x,y) = 2\,x - 1 \quad \text{und} \quad \partial_y f(x,y) = 2\,y + 1,$$

also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2\,x-1,\ 2\,y+1)\,,$$

und zum anderen

$$\partial_x \partial_x f(x,y) = 2 \quad \text{und} \quad \partial_y \partial_y f(x,y) = 2$$

sowie

$$\partial_x \partial_y f(x,y) = 0 = \partial_y \partial_x f(x,y),$$

also

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die kritischen Punkte von f sind genau die Nullstellen von $\operatorname{grad} f$; wegen

$$\partial_x f(x,y) = 0 \iff 2\,x - 1 = 0 \iff 2\,x = 1 \iff x = \tfrac{1}{2}$$

und

$$\partial_y f(x,y) = 0 \iff 2\,y + 1 = 0 \iff 2\,y = -1 \iff y = -\tfrac{1}{2}$$

besitzt f genau einen kritischen Punkt, nämlich $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Die Hessematrix

$$H = \operatorname{Hess} f(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist wegen $\det(H) = 4 > 0$ und $\operatorname{Spur}(H) = 4 > 0$ positiv definit, so daß f in $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ein isoliertes lokales Minimum besitzt.

b) Die abgeschlossene Einheitskreisscheibe

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$; damit besitzt die (als Polynomfunktion insbesondere) stetige Funktion f auf D nach dem Satz von Weierstraß (mindestens) eine globale Minimalstelle $(p_1, q_1) \in D$ und (mindestens) eine globale Maximalstelle $(p_2, q_2) \in D$, für alle $(x, y) \in D$ gilt also $f(p_1, q_1) \leq f(x, y) \leq f(p_2, q_2)$. Für globale Extremstellen $(p, q) \in D$ kommen nur die beiden folgenden Fälle in Frage:

- Der Punkt (p, q) liegt auf dem Rand ∂D von D; wir betrachten für die Punkte der Einheitskreislinie ∂D die Darstellung $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ in Polarkoordinaten mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und erhalten

$$f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1} - \cos\varphi + \sin\varphi = 1 - \cos\varphi + \sin\varphi.$$

  Die differenzierbare Hilfsfunktion

$$h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = 1 - \cos\varphi + \sin\varphi,$$

  kann ihre Extremwerte in den Randpunkten $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ ihres Definitionsintervalls $[0, 2\pi]$ und auf $]0, 2\pi[$ in den Nullstellen ihrer Ableitung

$$h'(\varphi) = 0 - (-\sin\varphi) + \cos\varphi = \sin\varphi + \cos\varphi,$$

  also für $\cos\varphi = -\sin\varphi$ und damit in $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ oder in $\varphi = \frac{7}{4}\pi$ annehmen; damit kommen für (p, q) die Punkte $(1, 0)$ sowie $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ und $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ in Frage.

- Der Punkt (p, q) liegt im Innern $\overset{\circ}{D}$ von D; dann ist aber (p, q) ein kritischer Punkt von f, weswegen gemäß a) nur $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ in Frage kommt.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(p,q)	$(1,0)$	$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
$f(p,q)$	0	$1 + \sqrt{2}$	$1 - \sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$

erkennt man, daß f auf $D \subseteq \mathbb{R}^2$ in $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ das globale Minimum $-\frac{1}{2}$ sowie in $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ das globale Maximum $1 + \sqrt{2}$ besitzt. Da $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zudem zusammenhängend ist, gilt $f(D) = \left[-\frac{1}{2},\ 1 + \sqrt{2}\right]$.

2. a) Es ist die inhomogene lineare Differentialgleichung $y' = a(x)\,y + b(x)$ erster Ordnung mit den stetigen Funktionen

$$a : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad a(x) = -\tan x = \frac{-\sin x}{\cos x},$$

und

$$b : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad b(x) = \cos^2 x,$$

zu betrachten. Da

$$A : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad A(x) = \ln|\cos x| \underset{\cos x > 0}{=} \ln(\cos x),$$

eine Stammfunktion von a ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\, e^{A(x)} = c\, e^{\ln(\cos x)} = c \cos x,$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)\, y$ dar.
Zur Behandlung der inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz der Variation der Konstanten

$$\varphi : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = u(x) \cos x,$$

mit einer differenzierbaren Funktion $u : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$. Wegen

$$\varphi'(x) = u'(x) \cos x + u(x)\,(-\sin x) = u'(x) \cos x - u(x) \sin x$$

für alle $x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$ ist φ genau dann Lösung von $y' = a(x)\, y + b(x)$, wenn

$$u'(x) \cos x - u(x) \sin x = -\frac{\sin x}{\cos x}\, u(x) \cos x + \cos^2 x,$$

also

$$u'(x) \cos x = \cos^2 x \qquad \text{bzw.} \qquad u'(x) = \cos x$$

für alle $x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$ gilt. Folglich ergibt sich

$$u(x) = \sin x + c \qquad \text{für ein} \quad c \in \mathbb{R}$$

und damit

$$\varphi(x) = u(x) \cos x = (\sin x + c) \cos x$$

für alle $x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$; die Gesamtheit dieser Funktionen stellt die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung dar.

b) Es ist die Differentialgleichung $y' = g(y)\, h(x)$ erster Ordnung mit getrennten Varialben mit den beiden stetigen Funktionen

$$g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad g(y) = y^2,$$

und

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = 4\, x^3,$$

zu betrachten. Wegen $g(y) \neq 0$ für alle $y > 0$ erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\, dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int \frac{1}{y^2}\, dy = \int 4\, x^3\, dx,$$

also

$$-\frac{1}{y} = x^4 + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, woraus sich wegen

$$y(0) = 1 \iff -\frac{1}{1} = 0^4 + c \iff -1 = c$$

also

$$-\frac{1}{y} = x^4 - 1 \qquad \text{bzw.} \qquad y = \frac{1}{1 - x^4}$$

ergibt. Für den Nenner der Lösungsfunktion gilt

$$1 - x^4 = 0 \iff x^4 = 1 \iff x = \pm 1,$$

so daß im Hinblick auf den geforderten Anfangswert das offene Intervall $]-1,1[$ maximales Lösungsintervall zu wählen ist, da es $x_0 = 0$ beinhaltet; damit ist

$$\varphi :]-1,1[\to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{1 - x^4},$$

die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

3. Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3\,x^2 - 10\,x\,y + 3\,y^2 + 38\,x - 42\,y + 103 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{sowie} \quad b = \begin{pmatrix} 38 \\ -42 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 103 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ -5 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - (-5)^2 = (-2 - \lambda)(8 - \lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 8$; wegen

$$A - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E_2 = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 8$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^\top A P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 38 & -42 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 103 = 0,$$

und damit

$$-2\,u^2 + 8\,v^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}\,u - \frac{80}{\sqrt{2}}\,v + 103 = 0.$$

Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$\begin{aligned} -2\left(u^2 + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot u + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + 8\left(v^2 - 2\cdot\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot v + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2\right) &= \\ = -103 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2&, \end{aligned}$$

also

$$-2\left(u + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8\left(v - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = -103 - 1 + 100 = -4,$$

so daß sich mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ v - \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ dann

$$-2\,w^2 + 8\,z^2 = -4, \qquad \text{also} \qquad \frac{w^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1,$$

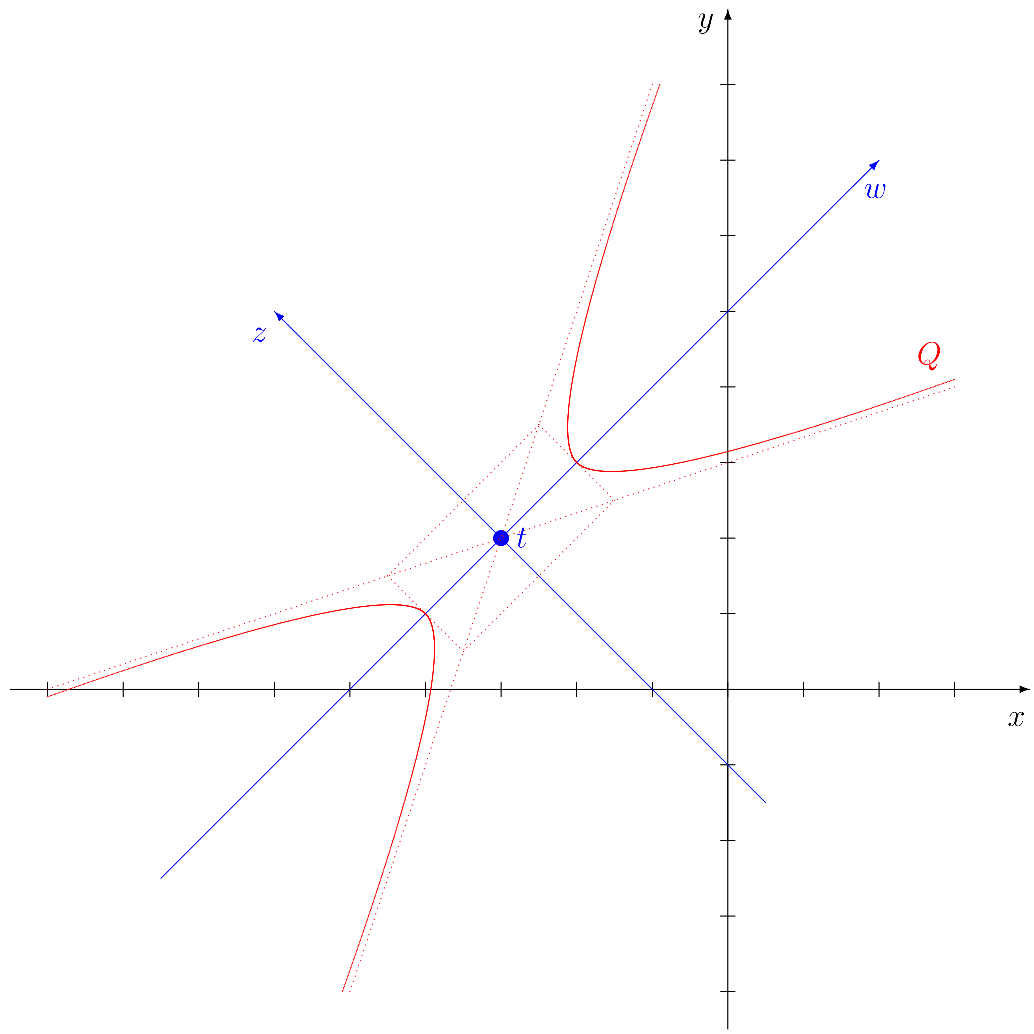
die euklidische (metrische) Normalform einer Hyperbel ergibt. Insgesamt ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P\cdot\begin{pmatrix} w - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ z + \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = P\cdot\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + P\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &= \\ = P\cdot\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = P\cdot\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=t}&; \end{aligned}$$

damit besitzt Q die beiden Hauptachsen

$$t + \mathbb{R}\cdot\frac{v_1}{\|v_1\|} \quad (w\text{–Achse}) \qquad \text{und} \qquad t + \mathbb{R}\cdot\frac{v_2}{\|v_2\|} \quad (z\text{–Achse}),$$

und wir erhalten im x–y–Koordinatensystem die folgende Skizze:



4. a) Wir bestimmen die affine Normalform für die in der Ebene mit den Koordinaten x und y durch die Gleichung

$$(*) \qquad x^2 - 6\,x\,y + 9\,y^2 + 4\,x - 14\,y + 8 = 0$$

gegebenen Quadrik Q mit Hilfe quadratischer Ergänzung. Wegen

$$\begin{aligned}
(*) \quad \Longleftrightarrow \quad & \big(x^2 - 6\,x\,y + 4\,x\big) + 9\,y^2 - 14\,y + 8 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \big(x^2 + 2 \cdot x \cdot (-3\,y) + 2 \cdot x \cdot 2 + (-3\,y)^2 + 2^2 + 2 \cdot (-3\,y) \cdot 2\big) - \\
& \quad - \big((-3\,y)^2 + 2^2 + 2 \cdot (-3\,y) \cdot 2\big) + 9\,y^2 - 14\,y + 8 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & (x + (-3\,y) + 2)^2 - \big(9\,y^2 + 4 - 12\,y\big) + 9\,y^2 - 14\,y + 8 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & (x - 3\,y + 2)^2 - (2\,y - 4) = 0
\end{aligned}$$

erhält man mit der affinen Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3\,y + 2 \\ 2\,y - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

die affine Normalform $w^2 - z = 1$ einer Parabel; dabei ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{mit} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

und die Affinität

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

bildet die Quadrik in affiner Normalform auf die Quadrik Q ab.

b) Wir ermitteln für die in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ gegebene Quadrik

$$Q_s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (*) \quad x^2 + 2\,s\,x\,y + y^2 = 1 \right\}$$

die affine Normalform und den Typ über quadratischer Ergänzung; es ist

$$\begin{aligned} (*) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot (s\,y) + (s\,y)^2\right) - (s\,y)^2 + y^2 = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x + s\,y)^2 + (1 - s^2)\,y^2 = 1, \end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $|s| < 1$, also $s^2 < 1$ und damit $1 - s^2 > 0$, ist

  $$(*) \iff (x + s\,y)^2 + \left(\sqrt{1 - s^2}\,y\right)^2 = 1;$$

  damit besitzt Q_s die affine Normalform $u^2 + v^2 = 1$ einer Ellipse.
- Für $|s| = 1$, also $s^2 = 1$ und damit $1 - s^2 = 0$, ist

  $$(*) \iff (x + s\,y)^2 = 1;$$

  damit besitzt Q_s die affine Normalform $u^2 = 1$ eines parallelen Geradenpaars.
- Für $|s| > 1$, also $s^2 > 1$ und damit $1 - s^2 < 0$, ist

  $$(*) \iff (x + s\,y)^2 - \left(\sqrt{s^2 - 1}\,y\right)^2 = 1;$$

  damit besitzt Q_s die affine Normalform $u^2 - v^2 = 1$ einer Hyperbel.

Die Quadrik Q_s ist genau dann zum Einheitskreis affin äquivalent, wenn sie eine Ellipse ist; dies ist genau für $s \in \,]-1, 1[$ der Fall.