MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/17
Klausur
18.02.2017

Klausur zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt"

1. Gegeben sei die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - x + y.$$
   a) Man zeige, daß f genau einen kritischen Punkt besitzt, und entscheide, ob dort eine lokale Extremstelle oder ein Sattelpunkt vorliegt. (3)

   b) Man bestimme alle globalen Extremstellen von f auf der Menge
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
   und gebe die Wertemenge $f(D)$ von f auf D an. (3)

2. a) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y' = (-\tan x) \cdot y + \cos^2 x \qquad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$
   b) Man bestimme die maximale Lösung des Anfangswertproblems
$$y' = 4\,x^3\,y^2 \qquad \text{für} \quad y > 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$$
   unter Angabe ihres Definitionsintervalls. (3)

3. In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ ist die Quadrik
$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3\,x^2 - 10\,x\,y + 3\,y^2 + 38\,x - 42\,y + 103 = 0 \right\}$$
   gegeben. Man zeige, daß Q eine Hyperbel mit der metrischen Normalform
$$\frac{w^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$$
   ist, und skizziere Q im x–y–Koordinatensystem. (6)

4. a) Man bestimme die affine Normalform sowie den Typ der Quadrik
$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 6\,x\,y + 9\,y^2 + 4\,x - 14\,y + 8 = 0 \right\}$$
   und gebe eine Affinität $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, die die Quadrik in affiner Normalform auf die Quadrik Q abbildet. (3)

   b) Man bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ den affinen Typ der Quadrik
$$Q_s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2\,s\,x\,y + y^2 = 1 \right\}$$
   und entscheide, für welche Werte von $s \in \mathbb{R}$ die Quadrik Q_s zum Einheitskreis affin äquivalent ist. (3)