MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/17
Blatt 11
16.01.2017

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Bearbeitungsvorschlag —

41. a) Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 9\,y^2 - 40\,x\,y + 64\,y + 80\,x = 64 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -20 \\ -20 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 80 \\ 64 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = -64 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -20 \\ -20 & 9 \end{vmatrix} = 0 \cdot 9 - (-20)^2 = -400 \neq 0$$

ist die Matrix A invertierbar; damit besitzt Q den Mittelpunkt

$$t = -\frac{1}{2} \cdot A^{-1} \cdot b = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-400} \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 20 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 64 \end{pmatrix} = \frac{1}{800} \begin{pmatrix} 2000 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Verschiebung des Mittelpunkts in den Ursprung wird durch die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} u + \frac{5}{2} \\ v + 2 \end{pmatrix}$ vermittelt; diese führt die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

(gemäß der in der Vorlesung durchgeführten Rechnung) in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \left(c + \tfrac{1}{2} \cdot b^\top t\right) = 0$$

über; wegen

$$c + \tfrac{1}{2} \cdot b^\top t = -64 + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 80 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = -64 + 164 = 100$$

ergibt sich also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 100 = 0.$$

b) Wegen

$$\det(A - \lambda\, E) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -20 \\ -20 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (9-\lambda) - (-20)^2 =$$
$$= \lambda^2 - 9\,\lambda - 400 = (\lambda + 16)\,(\lambda - 25)$$

besitzt die Matrix A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -16$ und $\lambda_2 = 25$. Wegen

$$A - \lambda_1\, E = \begin{pmatrix} 16 & -20 \\ -20 & 25 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = -16$, und wegen

$$A - \lambda_2\, E = \begin{pmatrix} -25 & -20 \\ -20 & -16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 25$; mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{||v_1||}, \frac{v_2}{||v_2||} \right) \qquad \text{gilt dann} \qquad P^\top A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Die erneute Variablentransformation $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ liefert die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P^\top A P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + 100 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda_1 \cdot w^2 + \lambda_2 \cdot z^2 = -100$$

und folglich

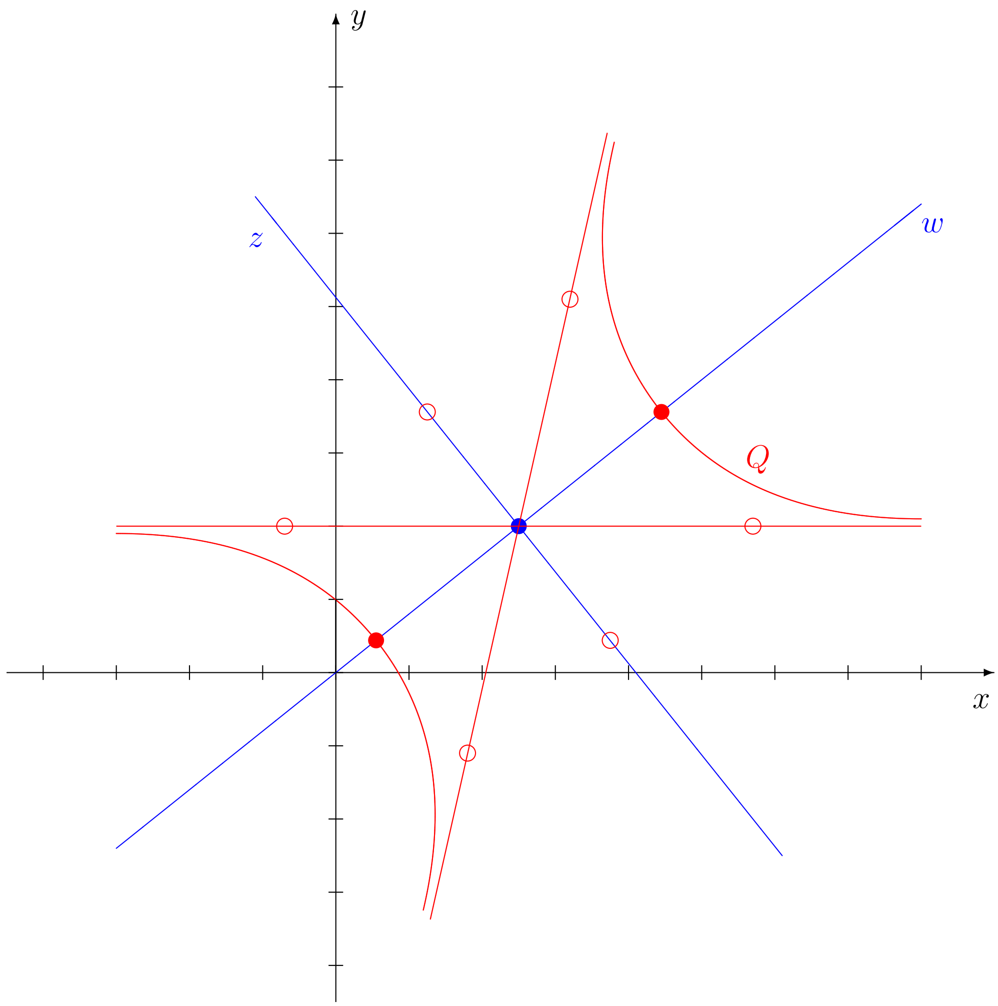
$$-16 \cdot w^2 + 25 \cdot z^2 = -100 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} - \frac{z^2}{2^2} = 1;$$

die letzte Gleichung ist die euklidische Normalform von Q.

c) Gemäß a) und b) ist die Quadrik Q eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt $t = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ und den beiden Hauptachsen

$$t + \mathbb{R} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t + \mathbb{R} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix};$$

diese beiden Geraden entsprechen der w–Achse und der z–Achse desjenigen Koordinatensystems, in dem Q die in b) ermittelte euklidische Normalform besitzt.



42. Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 4x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 1 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A - \lambda\, E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 2^2 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda\,(\lambda - 5)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 0$; wegen

$$A - \lambda_1\, E = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$, und wegen

$$A - \lambda_2\, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{||v_1||}, \frac{v_2}{||v_2||} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot P^\top A P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 1 = 0,$$

und damit

$$5\, y_1^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}\, y_2 + 1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 5\, y_1^2 - \frac{10}{\sqrt{5}} \left(y_2 - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) = 0$$

über; die Variablentransformation $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - \frac{\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$ liefert nun die Gleichung

$$5\, z_1^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}\, z_2 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{z_1^2}{\frac{2}{\sqrt{5}}} - z_2 = 0,$$

also die euklidische (metrische) Normalform einer Parabel.

43. Der gegebene Kegelschnitt

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 4\, x_1\, x_2 + 4\, x_2^2 - 6\, x_1 + 12\, x_2 + 8 = 0 \right\}.$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad c = 8 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(4-\lambda) - (-2)^2 = \\ &= (4 - 5\,\lambda + \lambda^2) - 4 = (\lambda - 5) \cdot \lambda \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 0$; wegen

$$A - \lambda_1\, E_2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$, und wegen

$$A - \lambda_2\, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} P^\top A P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + b^\top P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 12 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 8 = 0,$$

und damit

$$5\, y_1^2 + \frac{30}{\sqrt{5}}\, y_1 + 8 = 0.$$

Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$5\left(y_1^2 + 2\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot y_1 + \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2\right) = -8 + 5\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2,$$

also

$$5\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1,$$

so daß sich mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + \frac{3}{\sqrt{5}} \\ y_2 \end{pmatrix}$ dann

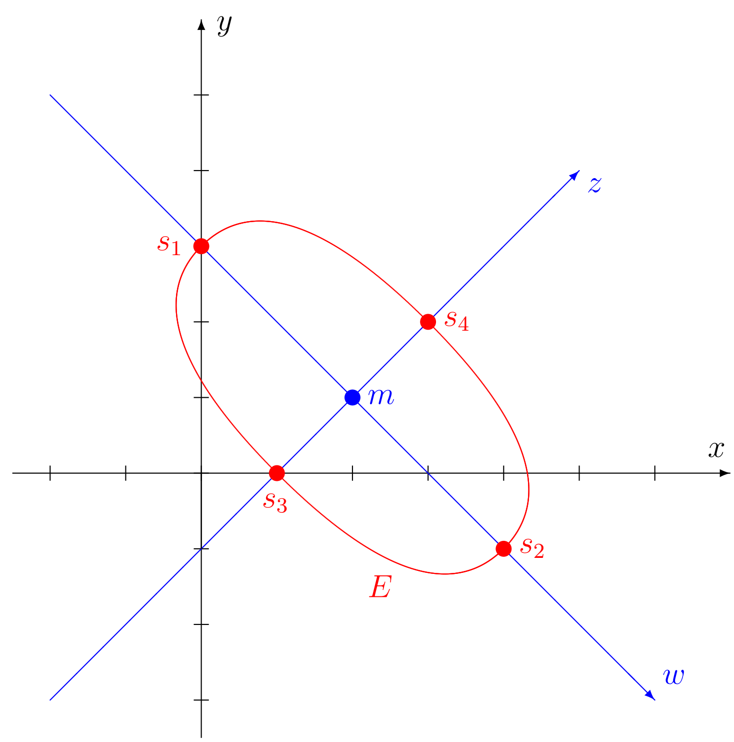
$$5\,z_1^2 = 1, \qquad \text{also} \qquad \frac{z_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Parallelenpaares ergibt.

44. a) Für die im (x,y)–Koordinatensystem gegebene Ellipse E mit den Scheitelpunkten

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich:



Damit besitzt die Ellipse E den Mittelpunkt

$$m = \frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{s_3 + s_4}{2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie die beiden Hauptachsen

$$w = m + \mathbb{R} \cdot (s_2 - m) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$z = m + \mathbb{R} \cdot (s_4 - m) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

als Länge ihrer Hauptachsenabschnitte ergibt sich

$$\alpha = \|s_2 - m\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

und

$$\beta = \|s_4 - m\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

b) Die Ellipse E besitzt im (w, z)–Koordinatensystem die euklidische Normalform

$$\frac{w^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\sqrt{8}^2} + \frac{z^2}{\sqrt{2}^2} = 1,$$

also

$$\frac{w^2}{8} + \frac{z^2}{2} - 1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad w^2 + 4\,z^2 - 8 = 0,$$

und damit die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot D \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + c' = 0$$

mit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad c' = -8 \in \mathbb{R};$$

ferner bezeichne

$$P = \left(\frac{s_2 - m}{\|s_2 - m\|} \,,\, \frac{s_4 - m}{\|s_4 - m\|} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

die orthogonale Matrix aus den normierten Richtungsvektoren der beiden Hauptachsen der Ellipse E. Für die gesuchte Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

von E in den Koordinaten x und y sind die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, der Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ sowie $c \in \mathbb{R}$ zu bestimmen: wegen $P^\top A P = D$ ist zunächst

$$\begin{aligned} A = PDP^\top &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wegen $2\,A\,m + b = 0$ dann

$$b = -2\,A\,m = -2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -11 \end{pmatrix}$$

und wegen $c' = c + \frac{1}{2} b^\top m$ schließlich

$$c = c' - \frac{1}{2} b^\top m = -8 - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -13 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -8 - \frac{-37}{2} = \frac{21}{2}.$$

Wir erhalten also die Gleichung

$$\frac{5}{2}\,x^2 + 3\,x\,y + \frac{5}{2}\,y^2 - 13\,x - 11\,y + \frac{21}{2} = 0$$

beziehungsweise

$$5\,x^2 + 6\,x\,y + 5\,y^2 - 26\,x - 22\,y + 21 = 0.$$