MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/17
Blatt 10
09.01.2017

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Bearbeitungsvorschlag —

37. Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 4\,(x^2+y^2) + 2\,x\,y + x + y - \frac{9}{10} = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = -\frac{9}{10} \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A - \lambda\,E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 1 = (3-\lambda)\,(5-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 5$; wegen

$$A - \lambda_1\,E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 5$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{||v_1||}, \frac{v_2}{||v_2||} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot P^\top A P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \frac{9}{10} = 0,$$

und damit

$$3\,u^2 + 5\,v^2 + \sqrt{2}\,v - \frac{9}{10} = 0$$

über. Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner

$$3\,u^2 + 5\left(v^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot v + \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2\right) = \frac{9}{10} + 5\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2$$

und damit

$$3\,u^2 + 5\left(v + \frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2 = 1,$$

so daß sich mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v + \frac{\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$3\,w^2 + 5\,z^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1$$

ergibt; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform dar. Insgesamt ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z - \frac{\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix} = \\ &= P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}}_{=t}; \end{aligned}$$

damit ist

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + t,$$

eine Bewegung, die die Ellipse

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1 \right\}$$

in euklidischer (metrischer) Normalform auf die gegebene Quadrik Q abbildet. Folglich ist Q eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$, den Hauptachsen

$$t + \mathbb{R} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t + \mathbb{R} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie den den Hauptachsenabschnitten der Länge $\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

38. Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3\,x^2 + 8\,x\,y - 3\,y^2 + 12\,x + 6\,y - 1 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = -1 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A - \lambda\,E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) - 4^2 = \\ = -9 + \lambda^2 - 16 = \lambda^2 - 25 = (\lambda - 5)\,(\lambda + 5)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = -5$; wegen

$$A - \lambda_1\,E = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -5$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{||v_1||}, \frac{v_2}{||v_2||} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot P^\top A P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - 1 = 0,$$

und damit

$$5\,u^2 - 5\,v^2 + \frac{30}{\sqrt{5}}\,u - 1 = 0$$

über. Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner

$$5\left(u^2 + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot u + \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2\right) - 5\,v^2 = 1 + 5\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2$$

und damit

$$5\left(u + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 5\,v^2 = 10,$$

so daß sich mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \frac{3}{\sqrt{5}} \\ v \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$5\,w^2 - 5\,z^2 = 10 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\sqrt{2}^{\,2}} - \frac{z^2}{\sqrt{2}^{\,2}} = 1$$

ergibt; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform einer Hyperbel dar.

39. Wir bestimmen zunächst den Abstand eines Punktes $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ von der Geraden ℓ und der Kreislinie K:

- Die Gerade $\ell = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3 \right\}$ besitzt die Hessesche Normalform $\dfrac{x-3}{1} = 0$; damit ist $d(P, \ell) = |x - 3|$.

- Es ist $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4 \right\}$ die Kreislinie um den Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem Radius $r = 2$; damit besitzt P von M den Abstand $\sqrt{x^2 + y^2}$, woraus sich dann $d(P, K) = \left| \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right|$ ergibt.

Damit ist

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 3| = 2 \cdot \left| \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right| \right\} = E_1 \cup E_2$$

mit

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right) = x - 3 \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right) = 3 - x \right\};$$

wir zeigen, daß E_1 und E_2 zwei Ellipsen sind, und bestimmen deren Mittelpunkte und die Längen ihrer Hauptachsen.

- Wegen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 \iff 2\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1 \iff 4\left(x^2 + y^2\right) = (x+1)^2 \iff$$

$$\iff 4\,x^2 + 4\,y^2 = x^2 + 2\,x + 1 \iff 3\,x^2 - 2\,x + 4\,y^2 = 1 \iff$$

$$\iff 3\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right) + 4\,y^2 = 1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 \iff$$

$$\iff 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 4\,y^2 = \frac{4}{3} \iff \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

ist E_1 eine Ellipse mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ und Hauptachsenlängen $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

- Wegen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2 \iff 2\sqrt{x^2 + y^2} = 7 - x \iff 4\left(x^2 + y^2\right) = (7 - x)^2 \iff$$

$$\iff 4\,x^2 + 4\,y^2 = 49 - 14\,x + x^2 \iff 3\,x^2 + 14\,x + 4\,y^2 = 49 \iff$$

$$\iff 3\left(x^2 + 2 \cdot \frac{7}{3} \cdot x + \left(\frac{7}{3}\right)^2 \right) + 4\,y^2 = 49 + 3\left(\frac{7}{3}\right)^2 \iff$$

$$\iff 3\left(x + \frac{7}{3}\right)^2 + 4\,y^2 = \frac{196}{3} \iff \frac{\left(x + \frac{7}{3}\right)^2}{\left(\frac{14}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

ist E_2 eine Ellipse mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ und Hauptachsenlängen $\frac{14}{3}$ und $\frac{7}{\sqrt{3}}$.

40. a) Die Höhe h_C des Dreiecks ABC durch die Ecke C steht auf der gegenüberliegenden Seite AB senkrecht; damit ist h_C eine Gerade mit dem Trägerpunkt $t_1 = C = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$ und dem Normalenvektor $\widetilde{u}_1 = B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und besitzt damit die Gleichung

$$\widetilde{u}_1 \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \widetilde{u}_1 \circ t_1 \qquad \text{bzw.} \qquad x = c.$$

Die Höhe h_A des Dreiecks ABC durch die Ecke A steht auf der gegenüberliegenden Seite BC senkrecht; damit ist h_A eine Gerade mit dem Trägerpunkt $t_2 = A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und dem Normalenvektor $\widetilde{u}_2 = C - B = \begin{pmatrix} c-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und besitzt damit die Gleichung

$$\widetilde{u}_2 \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \widetilde{u}_2 \circ t_2 \qquad \text{bzw.} \qquad (c-1)\,x + y = 0.$$

Für den Höhenschnittpunkt $H = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ gilt also

$$x_0 = c \ \ (\text{wegen } H \in h_C) \qquad \text{und} \qquad (c-1)\,x_0 + y_0 = 0 \ \ (\text{wegen } H \in h_A)\,;$$

damit ergibt sich $y_0 = -(c-1)\,x_0$ und folglich

$$H = \begin{pmatrix} c \\ (1-c)\,c \end{pmatrix}.$$

b) Der Höhenfußpunkt $H_C = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ der Höhe h_C auf der Dreiecksseite AB liegt für $c < 0$ links von A sowie für $c > 1$ rechts von B; damit liegt der Höhenschnittpunkt H für diese Wahl der Parameter sicherlich außerhalb des Dreiecks.

Für $c \in [0; 1]$ liegt der Höhenfußpunkt H_C dagegen auf der Strecke $[AB]$. Ferner besitzt der Höhenfußpunkt H_A als Punkt der Dreiecksseite BC die Gestalt

$$B + \lambda \cdot (C - B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} c-1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei er als Punkt der Höhe h_A deren Gleichung genügt; aus

$$(c-1)\,(1 + \lambda\,(c-1)) + \lambda = 0$$

ergibt sich

$$(c-1) + \lambda\,(c-1)^2 + \lambda = 0, \qquad \text{also} \qquad \lambda = \frac{1-c}{(c-1)^2 + 1},$$

und wegen $\lambda \in [0; 1]$ liegt auch der Höhenfußpunkt H_A auf der Strecke $[BC]$. Damit liegt aber der Höhenschnittpunkt H jetzt innerhalb des Dreiecks.

c) Die Koordinaten des Höhenschnittpunkts $H = \begin{pmatrix} c \\ (1-c)\,c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ genügen der Gleichung

$$y = (1-c)\,c = (1-x)\,x = x - x^2.$$

Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich daraus

$$\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = -y + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

und damit

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -y + \frac{1}{4}.$$

Mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ -y + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ergibt sich die euklidische Normalform

$$w^2 = z$$

einer Parabel; dabei ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w + \frac{1}{2} \\ -z + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})} \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{=t \in \mathbb{R}^2}.$$