MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/17
Blatt 9
19.12.2016

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Bearbeitungsvorschlag —

33. a) Die gegebene Ellipse E besitzt die Gleichung

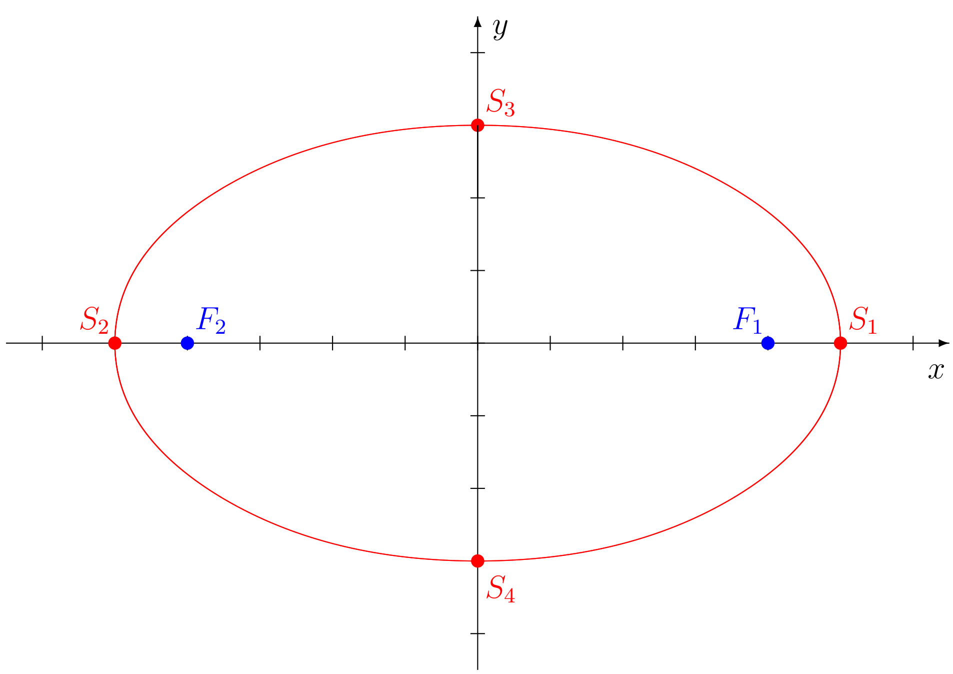
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{für} \qquad a = 5 \quad \text{und} \quad b = 3;$$

damit besitzt sie die vier Scheitelpunkte

$$S_1 = (5;0) \quad \text{und} \quad S_2 = (-5;0) \quad \text{sowie} \quad S_3 = (0;3) \quad \text{und} \quad S_4 = (0;-3)$$

und wegen $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16} = 4$ die beiden Brennpunkte

$$F_1 = (4;0) \quad \text{und} \quad F_2 = (-4;0).$$



b) Die gegebene Hyperbel H besitzt die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{für} \qquad a = 4 \quad \text{und} \quad b = 3;$$

damit besitzt sie die beiden Scheitelpunkte

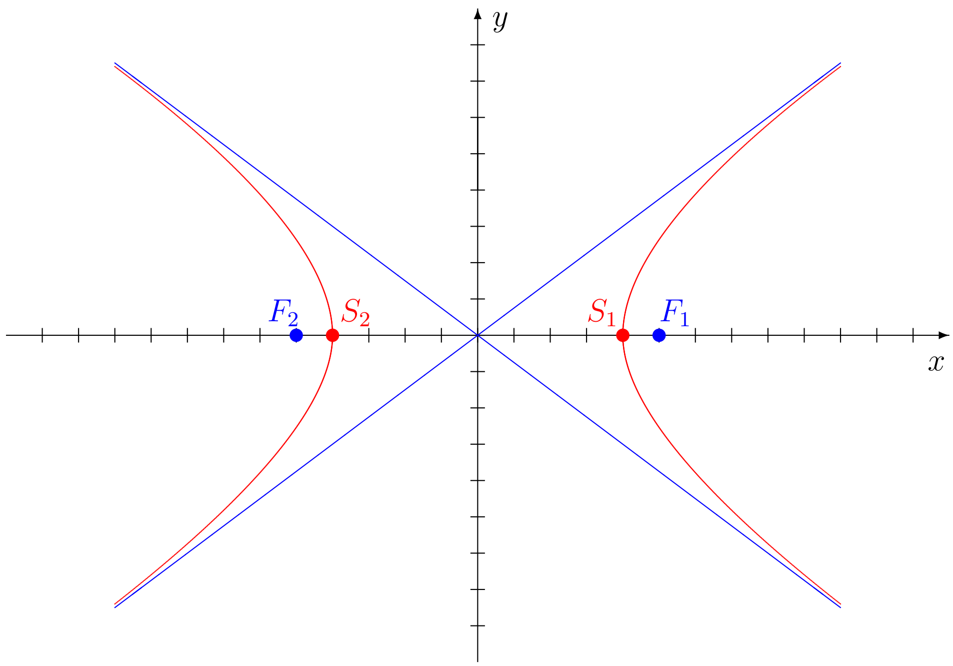
$$S_1 = (4;0) \quad \text{und} \quad S_2 = (-4;0),$$

wegen $e = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{25} = 5$ die beiden Brennpunkte

$$F_1 = (5;0) \quad \text{und} \quad F_2 = (-5;0)$$

sowie die beiden Asymptoten

$$y = \frac{3}{4}\,x \quad \text{und} \quad y = -\frac{3}{4}\,x.$$



c) Der Punkt $P_0 = (5, y_0)$ liegt genau dann auf der Hyperbel H, wenn seine Koordinaten der Hyperbelgleichung genügen; damit gilt

$$P_0 \in H \iff \frac{5^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} = 1 \iff \frac{25}{16} - 1 = \frac{y_0^2}{9} \iff$$
$$\iff \frac{y_0^2}{9} = \frac{9}{16} \iff y_0^2 = \frac{81}{16} \iff y_0 = \pm\frac{9}{4}.$$

Die Tangente an die Hyperbel H im Punkt $\left(5; \frac{9}{4}\right)$ besitzt dann die Gleichung

$$\frac{5\,x}{16} - \frac{\frac{9}{4}\,y}{9} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad 5\,x - 4\,y = 16,$$

und die Tangente an die Hyperbel H im Punkt $\left(5; -\frac{9}{4}\right)$ besitzt dann die Gleichung

$$\frac{5\,x}{16} - \frac{-\frac{9}{4}\,y}{9} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad 5\,x + 4\,y = 16.$$

34. a) Die Schnittpunkte von Q_1 und Q_2 sind genau diejenigen Punkte $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, deren Koordinaten sowohl der Ellipsengleichung

$$Q_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-1} = 1$$

als auch der Hyperbelgleichung

$$Q_2 : \frac{x^2}{1-b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

genügen; wir haben also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lccccccc} \text{(I)} & \dfrac{1}{a^2} & \cdot & x^2 & + & \dfrac{1}{a^2-1} & \cdot & y^2 & = & 1 \\ \text{(II)} & \dfrac{1}{1-b^2} & \cdot & x^2 & - & \dfrac{1}{b^2} & \cdot & y^2 & = & 1 \end{array}$$

in den Unbestimmten x^2 und y^2 zu lösen. Mit Hilfe des Additionsverfahrens ergibt sich über „$(a^2-1)\cdot(\mathrm{I}) + b^2 \cdot (\mathrm{II})$“

$$\left(\frac{a^2-1}{a^2} + \frac{b^2}{1-b^2}\right) \cdot x^2 = \left(a^2-1\right) + b^2,$$

wegen

$$\frac{a^2-1}{a^2} + \frac{b^2}{1-b^2} = \frac{(a^2-1)\cdot(1-b^2) + a^2 \cdot b^2}{a^2 \cdot (1-b^2)} = \frac{a^2-1+b^2}{a^2\cdot(1-b^2)}$$

also

$$x^2 = \frac{a^2\cdot(1-b^2)}{a^2-1+b^2} \cdot \left(a^2-1+b^2\right) = a^2 \cdot \left(1-b^2\right),$$

und damit über Gleichung (I)

$$\frac{1}{a^2} \cdot a^2 \cdot \left(1-b^2\right) + \frac{1}{a^2-1} \cdot y^2 = 1,$$

also

$$\frac{1}{a^2-1} \cdot y^2 = b^2 \qquad \text{bzw.} \qquad y^2 = b^2 \cdot \left(a^2-1\right).$$

Damit ist

$$x = \pm a\sqrt{1-b^2} \qquad \text{und} \qquad y = \pm b\sqrt{a^2-1},$$

weswegen die Ellipse Q_1 und die Hyperbel Q_2 die vier Schnittpunkte

$$\begin{array}{cc} \left(a\sqrt{1-b^2},\, b\sqrt{a^2-1}\right) & \left(a\sqrt{1-b^2},\, -b\sqrt{a^2-1}\right) \\ \left(-a\sqrt{1-b^2},\, b\sqrt{a^2-1}\right) & \left(-a\sqrt{1-b^2},\, -b\sqrt{a^2-1}\right) \end{array}$$

besitzen.

b) Wir betrachten nun den im 1. Quadranten liegenden Schnittpunkt

$$S = \left(a\sqrt{1-b^2},\, b\sqrt{a^2-1}\right) \in Q_1 \cap Q_2.$$

Die Tangente $T_S Q_1$ an die Ellipse Q_1 im Punkt S besitzt die Gleichung

$$\frac{a\sqrt{1-b^2}\cdot x}{a^2} + \frac{b\sqrt{a^2-1}\cdot y}{a^2-1} = 1,$$

es ist also

$$T_S Q_1 \quad : \quad \frac{\sqrt{1-b^2}}{a} \cdot x + \frac{b}{\sqrt{a^2-1}} \cdot y = 1,$$

und die Tangente $T_S Q_2$ an die Hyperbel Q_2 im Punkt S besitzt die Gleichung

$$\frac{a\sqrt{1-b^2} \cdot x}{1-b^2} + \frac{b\sqrt{a^2-1} \cdot y}{b^2} = 1,$$

es ist also

$$T_S Q_2 \quad : \quad \frac{a}{\sqrt{1-b^2}} \cdot x - \frac{\sqrt{a^2-1}}{b} \cdot y = 1.$$

Damit sind aber

$$\widetilde{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1-b^2}}{a} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2-1}} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{1-b^2}} \\ -\frac{\sqrt{a^2-1}}{b} \end{pmatrix}$$

Normalenvektoren der Tangenten $T_S Q_1$ und $T_S Q_2$; wegen

$$\widetilde{u}_1 \circ \widetilde{u}_2 = \frac{\sqrt{1-b^2}}{a} \cdot \frac{a}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \left(-\frac{\sqrt{a^2-1}}{b}\right) = 0$$

schneiden sich die Tangenten $T_S Q_1$ und $T_S Q_2$ unter einem rechten Winkel.

35. a) Ein Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ liegt genau dann sowohl auf der Geraden mit der Gleichung $y = a\,x + t$ als auch auf der Parabel mit der Gleichung $y = x^2$, wenn $x^2 = a\,x + t$ gilt. Damit existieren genau dann zwei Schnittpunkte S_1 und S_2, wenn die quadratische Gleichung

$$x^2 - a\,x - t = 0$$

zwei verschiedene reelle Lösungen besitzt; dies ist aber genau dann der Fall, wenn für die Diskriminante

$$\Delta = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-t) = a^2 + 4\,t > 0$$

gilt, also für

$$t > -\frac{a^2}{4}.$$

Man erhält dann die beiden Schnittpunkte $S_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $S_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ mit

$$x_{1,2} = \frac{-(-a) \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 1} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4\,t}}{2}$$

und

$$y_{1,2} = a\,x_{1,2} + t = \frac{a^2 \pm a\sqrt{a^2 + 4\,t}}{2} + t;$$

wegen

$$x_1 + x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4\,t}}{2} + \frac{a - \sqrt{a^2 + 4\,t}}{2} = a$$

und

$$y_1 + y_2 = \left(\frac{a^2 + a\sqrt{a^2+4\,t}}{2} + t \right) + \left(\frac{a^2 - a\sqrt{a^2+4\,t}}{2} + t \right) = a^2 + 2\,t$$

ergibt sich dann für den Mittelpunkt $M_{a,t}$ der Verbindungsstrecke von S_1 und S_2

$$M_{a,t} = \frac{S_1 + S_2}{2} = \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{y_1+y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a^2}{2} + t \end{pmatrix}.$$

b) Die Menge G_a aller Mittelpunkte

$$M_{a,t} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a^2}{2} + t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad t > -\frac{a^2}{4}$$

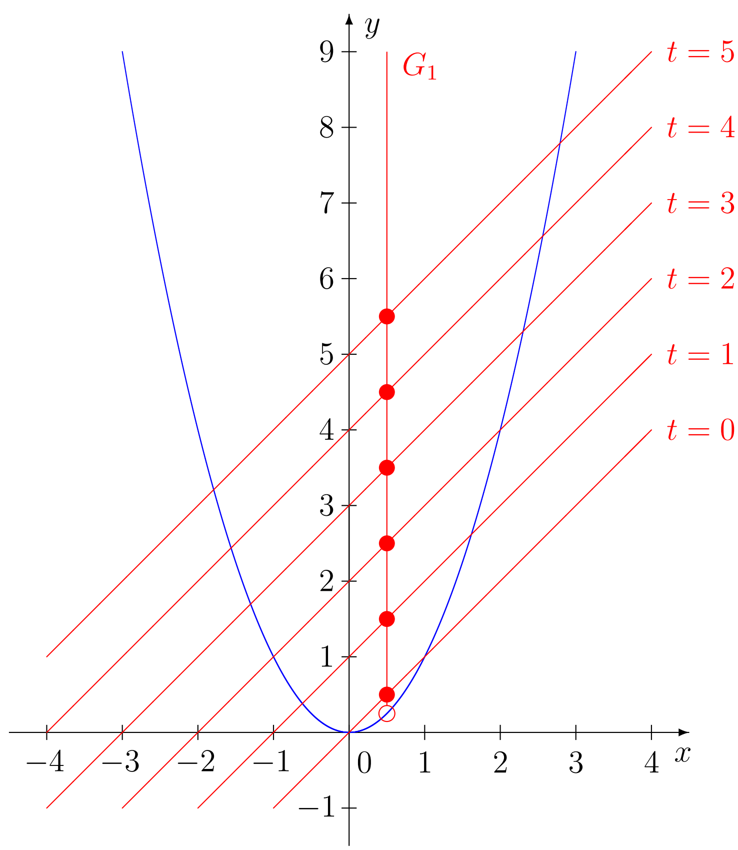
besteht genau aus allen Punkten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$x = \frac{a}{2} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{a^2}{2} + t > \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4};$$

damit handelt es sich bei G_a um die Halbgerade

$$G_a = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a^2}{4} \end{pmatrix} + \mathbb{R}^+ \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Die folgende Skizze stellt die Situation für $a = 1$ dar:



36. a) Die beiden Asymptoten

$$g_1 \;:\; y = \frac{b}{a}\cdot x \qquad \text{und} \qquad g_2 \;:\; y = -\frac{b}{a}\cdot x$$

besitzen die Gleichungen

$$g_1 \;:\; b\,x - a\,y = 0 \qquad \text{und} \qquad g_2 \;:\; b\,x + a\,y = 0,$$

also die Normalenvektoren

$$\widetilde{u}_{1,2} = \begin{pmatrix} b \\ \pm a \end{pmatrix} \qquad \text{der Länge} \qquad \|\widetilde{u}_{1,2}\| = \sqrt{b^2 + (\pm a)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

und damit die Hessesche Normalformen

$$g_1 \;:\; \frac{b\,x - a\,y}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \qquad \text{und} \qquad g_2 \;:\; \frac{b\,x + a\,y}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

Folglich besitzt der Punkt $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ zu den beiden Asymptoten g_1 und g_2 die Abstände

$$d(P, g_1) = \left|\frac{b\,x_0 - a\,y_0}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \qquad \text{und} \qquad d(P, g_2) = \left|\frac{b\,x_0 + a\,y_0}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|.$$

b) Für einen Punkt $P = (x_0, y_0)$ auf der Hyperbel gilt

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

und damit

$$\begin{aligned}
d(P,g_1)\cdot d(P,g_2) &= \left|\frac{b\,x_0 - a\,y_0}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \cdot \left|\frac{b\,x_0 + a\,y_0}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \\
&= \left|\frac{b\,x_0 - a\,y_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{b\,x_0 + a\,y_0}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \\
&= \left|\frac{(b\,x_0 - a\,y_0)\cdot(b\,x_0 + a\,y_0)}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}\right| = \\
&= \left|\frac{b^2\,x_0^2 - a^2\,y_0^2}{a^2+b^2}\right| = \left|\frac{a^2\,b^2\,\left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right)}{a^2+b^2}\right| = \\
&= \frac{a^2\,b^2}{a^2+b^2}\cdot\left|\underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}_{=1}\right| = \frac{a^2\,b^2}{a^2+b^2}.
\end{aligned}$$