MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/17
Blatt 7
05.12.2016

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Bearbeitungsvorschlag —

25. Die zweimal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f''(x) = 4\,f(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

sind genau die Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$y'' - 4\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 4$$

besitzt die beiden einfachen reellen Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$, so daß die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{\lambda_1\,x} = e^{2\,x},$$

und

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2\,x} = e^{-2\,x},$$

ein Fundamentalsystem bilden; damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\,e^{2\,x} + c_2\,e^{-2\,x}$$

mit den Konstanten $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - 4\,y = 0$, die gesuchten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ finden sich also auf jeden Fall unter diesen Lösungen. Wegen

$$\varphi(0) = 1 \iff c_1\,e^0 + c_2\,e^0 = 1 \iff c_1 + c_2 = 1 \iff c_2 = 1 - c_1$$

erfüllen genügen dabei genau die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = c_1\,e^{2\,x} + (1 - c_1)\,e^{-2\,x}$$

der gestellten Anfangsbedingung $f(0) = 1$; darunter befinden sich auch die beiden Fundamentallösungen φ_1 (für $c_1 = 1$) und φ_2 (für $c_1 = 0$), die beide bekanntlich keine Nullstelle besitzen.

Wir betrachten nun die Funktion f für ein $c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; wegen

$$f(x) = 0 \iff c_1\,e^{2\,x} + (1 - c_1)\,e^{-2\,x} = 0 \iff$$
$$\iff c_1\,e^{2\,x} = (c_1 - 1)\,e^{-2\,x} \iff e^{4\,x} = \frac{c_1 - 1}{c_1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ergeben sich damit die beiden folgenden Fälle:

- Ist $\frac{c_1-1}{c_1} > 0$, so besitzt f die Nullstelle $x = \frac{1}{4} \ln \frac{c_1-1}{c_1}$.
- Ist $\frac{c_1-1}{c_1} < 0$, so besitzt f keine Nullstelle.

Wegen

$$\frac{c_1 - 1}{c_1} < 0 \iff 1 - \frac{1}{c_1} < 0 \iff 1 < \frac{1}{c_1} \iff 0 < c_1 < 1$$

besitzt die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = c_1 \, e^{2\,x} + (1 - c_1) \, e^{-2\,x}$$

insgesamt genau dann keine Nullstelle, wenn $c_1 \in [0; 1]$ gilt.

26. Es handelt sich um die homogene lineare Differentialgleichung

$$y''' - 2\,y'' + 5\,y' = 0$$

dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 2\,\lambda^2 + 5\,\lambda = \lambda \left(\lambda^2 - 2\,\lambda + 5\right)$$

besitzt die einfache reelle Nullstelle $\lambda_1 = 0$ sowie (unter Verwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen) die beiden konjugiert–komplexen Nullstellen

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left(-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5} \right) = \frac{1}{2} \left(2 \pm \sqrt{-16} \right) = 1 \pm 2\,i,$$

so daß die drei (reellwertigen) Funktionen φ_1, φ_2, $\varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^0 = 1 \quad \text{sowie} \quad \varphi_2(x) = e^x \cos(2x) \quad \text{und} \quad \varphi_3(x) = e^x \sin(2x)$$

ein Fundamentalsystem von $y''' - 2\,y'' + 5\,y' = 0$ bilden; damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 + c_3 \cdot \varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; \varphi(x) = c_1 + c_2 \, e^x \cos(2x) + c_3 \, e^x \sin(2x)$$

mit den Konstanten c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''' - 2\,y'' + 5\,y' = 0$, welche nun den gegebenen Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$ und $y''(0) = -11$ anpaßt werden. Wegen

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= c_2 \left(e^x \cos(2x) - 2\, e^x \sin(2x) \right) + c_3 \left(e^x \sin(2x) + 2\, e^x \cos(2x) \right) = \\ &= (c_2 + 2\,c_3)\, e^x \cos(2x) + (-2\,c_2 + c_3)\, e^x \sin(2x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= (c_2 + 2\,c_3) \left(e^x \cos(2x) - 2\, e^x \sin(2x) \right) + \\ &\quad + (-2\,c_2 + c_3) \left(e^x \sin(2x) + 2\, e^x \cos(2x) \right) = \\ &= (-3\,c_2 + 4\,c_3)\, e^x \cos(2x) + (-4\,c_2 - 3\,c_3)\, e^x \sin(2x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 0 = 0 \iff c_1 + c_2 = 0$$

sowie entsprechend

$$\varphi'(0) = -3 \iff c_2 + 2\,c_3 = -3$$

und

$$\varphi''(0) = -11 \iff -3\,c_2 + 4\,c_3 = -11,$$

woraus man zunächst $c_2 = 1$ und $c_3 = -2$ und dann $c_1 = -1$ erhält. Folglich ist die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -1 + e^x \cos(2x) - 2\,e^x \sin(2x),$$

die Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

27. Die in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}^+$ gegebene homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(*) \qquad y'' + c^2\,y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + c^2 = \lambda^2 - (c\,i)^2 = (\lambda - c\,i) \cdot (\lambda + c\,i)$$

mit den beiden konjugiert–komplexen Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm c\,i$ mit dem Realteil $\varrho = 0$ und dem Imaginärteil $\pm\sigma$ mit $\sigma = c$; damit bilden die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\qquad \varphi_1(x) = e^{\varrho x} \cos(\sigma x) = \cos(c\,x), \\ \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\qquad \varphi_2(x) = e^{\varrho x} \sin(\sigma x) = \sin(c\,x), \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem von $(*)$, und die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 \cdot \cos(c\,x) + c_2 \cdot \sin(c\,x),$$

mit c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ stellt die allgemeine Lösung von $(*)$ dar. Dabei wird wegen

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1 \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1} + c_2 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} = 0 \iff c_1 = 0$$

die erste Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$ genau von den Lösungen

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_2 \cdot \sin(c\,x),$$

erfüllt; wegen $\varphi'(x) = c_2\,c \cdot \cos(c\,x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich für die zweite Anfangsbedingung $\varphi'(1) = 0$ damit

$$\varphi'(1) = 0 \iff c_2\,c \cdot \cos c = 0 \underset{c \neq 0}{\iff} c_2 \cdot \cos c = 0,$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\cos c \neq 0$ ist $\varphi'(1) = 0 \iff c_2 = 0$, und damit ist die Nullfunktion die einzige Lösung von $(*)$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(1) = 0$.
- Für $\cos c = 0$ ist $\varphi'(1) = 0$ für alle $c_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt, und für jedes $c_2 \neq 0$ ist die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = c_2 \cdot \sin(c\,x)$, eine von der Nullfunktion verschiedene Lösung von $(*)$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(1) = 0$.

Damit besitzt die gegebene Differentialgleichung $(*)$ genau dann eine von der Nullfunktion verschiedene Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(1) = 0$, wenn $\cos c = 0$ gilt, also genau für $c \in \frac{\pi}{2} + \mathbb{N}_0 \cdot \pi$.

28. Die in Abhängigkeit von $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ gegebene homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(*) \qquad y'' - 2\,a\,y' + b\,y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2\,a\,\lambda + b$$

mit den Nullstellen

$$\frac{-(-2\,a) \pm \sqrt{(-2\,a)^2 - 4 \cdot b}}{2} = \frac{2\,a \pm \sqrt{4\,(a^2 - b)}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - b};$$

wir treffen hinsichtlich des Radikanden $\Delta = a^2 - b$ folgende Fallunterscheidung:

- Im Falle $\Delta > 0$ besitzt $\chi(\lambda)$ zwei reelle Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, und wir können $\lambda_1 \neq 0$ annehmen; damit besitzt $(*)$ insbesondere die Lösung

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x},$$

die wegen

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi_1(x) = +\infty \qquad \text{für} \qquad \lambda_1 > 0$$

und

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi_1(x) = +\infty \qquad \text{für} \qquad \lambda_1 < 0$$

auf $\mathbb{R}$ nicht beschränkt ist.

- Im Falle $\Delta = 0$ besitzt $\chi(\lambda)$ eine doppelte reelle Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt $(*)$ insbesondere die Lösung

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = x\,e^{\lambda x},$$

die wegen

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi_2(x) = \lim_{x \to +\infty} \big(x \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{\geq 1 \text{ für } x > 0}\big) = +\infty \qquad \text{für} \qquad \lambda \geq 0$$

und

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi_2(x) = \lim_{x \to -\infty} \big(x \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{\geq 1 \text{ für } x < 0}\big) = -\infty \qquad \text{für} \qquad \lambda \leq 0$$

auf $\mathbb{R}$ nicht beschränkt ist.

- Im Falle $\Delta < 0$ besitzt $\chi(\lambda)$ zwei konjugiert–komplexe Nullstellen $\varrho \pm i\,\sigma$ mit $\varrho = a \in \mathbb{R}$ und $\sigma = \sqrt{b - a^2} \in \mathbb{R}^+$; damit bilden die beiden Funktionen

  $$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = e^{\varrho x}\cos(\sigma x), \quad \text{und} \quad \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_2(x) = e^{\varrho x}\sin(\sigma x),$$

  ein Fundamentalsystem von $(*)$. Dabei ist die Lösung φ_1 von $(*)$ wegen

  $$\varphi_1(\tfrac{2n\pi}{\sigma}) = e^{\frac{2\pi\varrho}{\sigma}n}\cos(2n\pi) = e^{\frac{2\pi\varrho}{\sigma}n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{für} \qquad \varrho > 0$$

  und

  $$\varphi_1(-\tfrac{2n\pi}{\sigma}) = e^{-\frac{2\pi\varrho}{\sigma}n}\cos(-2n\pi) = e^{-\frac{2\pi\varrho}{\sigma}n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{für} \qquad \varrho < 0$$

  auf $\mathbb{R}$ nicht beschränkt. Für $\varrho = 0$ ist die Gesamtheit der Funktionen

  $$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 \cdot \cos(\sigma x) + c_2 \cdot \sin(\sigma x),$$

  mit c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $(*)$; wegen

  $$|\varphi(x)| = |c_1 \cdot \cos(\sigma x) + c_2 \cdot \sin(\sigma x)| \leq \\ \leq |c_1| \cdot \underbrace{|\cos(\sigma x)|}_{\leq 1} + |c_2| \cdot \underbrace{|\sin(\sigma x)|}_{\leq 1} \leq |c_1| + |c_2|$$

  für alle $x \in \mathbb{R}$ ist jede Lösung φ von $(*)$ auf $\mathbb{R}$ beschränkt.

Zusammenfassend gilt: es ist genau dann jede Lösung der Differentialgleichung $(*)$ auf $\mathbb{R}$ beschränkt, wenn

$$\Delta = a^2 - b < 0 \qquad \text{und} \qquad \varrho = a = 0$$

ist, also genau für $a = 0$ und $b > 0$.