MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/18
Blatt 6
28.11.2016

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Bearbeitungsvorschlag —

21. Es handelt sich um eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen; dabei ist

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = -(1 + 2\,x), \quad \text{und} \quad g : \left]-\frac{1}{2}, \infty\right[\to \mathbb{R}, \quad g(y) = \frac{1}{1 + 2\,y}.$$

Wegen $g(y) \neq 0$ für alle $y > -\frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int (1 + 2\,y)\,dy = -\int (1 + 2\,x)\,dx$$

und damit

$$y + y^2 = -\left(x + x^2\right) + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wegen

$$y(0) = 0 \iff 0 + 0^2 = -\left(0 + 0^2\right) + c \iff 0 = -0 + c \iff c = 0$$

erhält man

$$y + y^2 = -\left(x + x^2\right),$$

woraus sich mit quadratischer Ergänzung zunächst

$$\left(\frac{1}{2} + y\right)^2 = \frac{1}{4} + y + y^2 = \frac{1}{4} - \left(x + x^2\right)$$

und wegen $\frac{1}{2} + y > 0$ schließlich

$$\frac{1}{2} + y = \sqrt{\frac{1}{4} - (x + x^2)} \quad \text{bzw.} \quad y = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - (x + x^2)}$$

ergibt. Nachdem die Wurzelfunktion zwar auf $\mathbb{R}_0^+$ definiert und dort stetig, aber nur auf $\mathbb{R}^+$ differenzierbar ist, enthält das maximale Lösungsintervall alle $x \in \mathbb{R}$, für die der Radikand positiv ist; wegen

$$\frac{1}{4} - \left(x + x^2\right) > 0 \iff \frac{1}{4} > x + x^2 \iff \frac{1}{2} > \frac{1}{4} + x + x^2 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 \iff$$

$$\iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2} + x < \frac{1}{\sqrt{2}} \iff -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} < x < -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist also

$$\varphi : \left]\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right[\to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - (x + x^2)},$$

die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

22. Es handelt sich um die Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen mit der stetigen Funktion

$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{x},$$

und der stetig differenzierbaren Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = y^2;$$

damit gibt es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. Die Nullstelle $y = 0$ von g liefert dabei die konstante Lösung $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = 0$, und die gesuchte Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ des gestellten Anfangswertproblems

$$y' = \frac{1}{x} \cdot y^2 \qquad \text{mit} \qquad y(1) = 1$$

kann keinen gemeinsamen Punkt mit ψ haben, ihr Graph G_φ verläuft also komplett oberhalb der x–Achse. Damit erhalten wir

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{1}{x}\, dx, \qquad \text{also} \qquad -\frac{1}{y} = \ln|x| + c \underset{x>0}{=} \ln x + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$; wegen $y(1) = 1$ ergibt sich

$$-\frac{1}{1} = \ln 1 + c \iff -1 = c$$

und damit

$$-\frac{1}{y} = \ln x - 1, \qquad \text{also} \quad y = \frac{1}{1 - \ln x}.$$

Die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$\varphi :]0; e[\to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1 - \ln x};$$

von den beiden maximalen Definitionsintervallen $]0; e[$ und $]e; \infty[$ der Funktion $x \mapsto \frac{1}{1-\ln x}$ ist dabei dasjenige zu wählen, das den Anfangswert $x_0 = 1$ enthält.

23. Dem gegebenen Anfangswertproblem

$$y' = \frac{2\,\cos^2(y)}{1 - x^2} \qquad \text{mit} \qquad y(0) = \frac{\pi}{3}$$

liegt die Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen für die stetigen Funktionen

$$h :]-1;1[\to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{2}{1-x^2}, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = \cos^2 y,$$

zugrunde; dabei wählen wir für h das maximale Definitionsintervall, welches den Punkt $x_0 = 0$ beinhaltet. Die Nullstellen von g, also die Nullstellen $\frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ des Cosinus, liefern die konstanten Lösungen der Differentialgleichung; da nun g sogar stetig differenzierbar ist, kann wegen des Existenz– und Eindeutigkeitssatzes jede weitere Lösung der gegebenen Differentialgleichung keinen gemeinsamen Punkt mit einer konstanten Lösungen besitzen. Folglich verläuft der Graph G_φ der maximalen Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ des gestellten Anfangswertproblems wegen $\varphi(0) = \frac{\pi}{3}$ komplett zwischen $y = -\frac{\pi}{2}$ und $y = \frac{\pi}{2}$. Wir erhalten

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \frac{2}{1-x^2}\,dx,$$

wegen

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)\cdot(1+x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$

also

$$\tan y = \ln(1+x) - \ln(1-x) + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$; wegen

$$y(0) = \frac{\pi}{3} \iff \tan\frac{\pi}{3} = \ln(1+0) - \ln(1-0) + c \iff \sqrt{3} = c$$

erhalten wir

$$\tan y = \ln\frac{1+x}{1-x} + \sqrt{3} \qquad \text{bzw.} \qquad y = \arctan\left(\ln\frac{1+x}{1-x} + \sqrt{3}\right),$$

und damit die maximale Lösung

$$\varphi :]-1;1[\to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \arctan\left(\ln\frac{1+x}{1-x} + \sqrt{3}\right).$$

24. a) Bei dem gegebenen Anfangswertproblem

$$y' = e^{x-y} = e^x \cdot e^{-y} \qquad \text{mit} \qquad y(0) = \ln 2$$

handelt es sich um eine Differentialgleichung $y' = g(y) \cdot h(x)$ mit getrennten Variablen mit den beiden stetigen Funktionen

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = e^{-y}, \qquad \text{und} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = e^x.$$

Wegen $g(y) = e^{-y} \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \quad \text{bzw.} \quad \int e^y\,dy = \int e^x\,dx, \quad \text{also} \quad e^y = e^x + c,$$

für ein $c \in \mathbb{R}$; dabei gilt

$$y(0) = \ln 2 \iff e^{\ln 2} = e^0 + c \iff 2 = 1 + c \iff c = 1$$

und damit

$$e^y = e^x + 1 \iff y = \ln\left(e^x + 1\right),$$

so daß

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \ln\left(e^x + 1\right),$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungsfunktion des gestellten Anfangswertproblems ist.

b) Für die Lösungsfunktion φ von a) erhält man die Grenzwerte

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln \underbrace{\big(\underbrace{e^x}_{\to 0} + 1\big)}_{\to 1} \underset{\ln\ \text{stetig}}{=} \ln 1 = 0$$

sowie

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\varphi(x) - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \big(\ln\left(e^x + 1\right) - \ln e^x\big) = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{e^x + 1}{e^x} =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \ln\big(1 + e^{-x}\big) = \lim_{x \to +\infty} \ln \underbrace{\big(1 + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}\big)}_{\to 1} \underset{\ln\ \text{stetig}}{=} \ln 1 = 0,$$

so daß sich für ihren Graphen G_φ die folgende Skizze ergibt: