

**Tutorium zur Vorlesung
„Mathematik im Querschnitt“
— Bearbeitungsvorschlag —**

17. Zu betrachten ist die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung $y' = a(x)y + b(x)$ mit

$$a :]-\infty; 2[\rightarrow \mathbb{R}, \quad a(x) = \frac{1}{x-2}, \quad \text{und} \quad b :]-\infty; 2[\rightarrow \mathbb{R}, \quad b(x) = x^2 - 2x.$$

Da

$$A :]-\infty; 2[\rightarrow \mathbb{R}, \quad A(x) = \ln|x-2| \underset{x<2}{=} \ln(2-x),$$

eine Stammfunktion von a ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c :]-\infty; 2[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c e^{A(x)} = c e^{\ln(2-x)} = c(2-x),$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)y$ dar.

Zur Behandlung der inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz $\varphi :]-\infty; 2[\rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = u(x) \cdot (2-x)$, der Variation der Konstanten mit einer differenzierbaren Funktion $u :]-\infty; 2[\rightarrow \mathbb{R}$. Wegen

$$\varphi'(x) = u'(x) \cdot (2-x) + u(x) \cdot (-1)$$

für alle $x < 2$ ist φ genau dann Lösung von $y' = a(x)y + b(x)$, wenn

$$u'(x)(2-x) - u(x) = \frac{1}{x-2} \cdot (u(x)(2-x)) + (x^2 - 2x),$$

also

$$u'(x) = \frac{x^2 - 2x}{2-x} = \frac{x(x-2)}{-(x-2)} = -x$$

für alle $x < 2$ gilt.

- Um eine partikuläre Lösung $\varphi_p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu erhalten, können wir speziell

$$u(x) = -\frac{x^2}{2}$$

und damit

$$\varphi_p(x) = u(x)(2-x) = -\frac{x^2}{2} \cdot (2-x)$$

für alle $x < 2$ wählen. Die allgemeine Lösung von $y' = a(x)y + b(x)$ ist damit die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_p + \varphi_c :]-\infty; 2[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\frac{x^2}{2} \cdot (2-x) + c(2-x) = \left(-\frac{x^2}{2} + c\right) \cdot (2-x),$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

- Um gleich die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu erhalten, wählen wir

$$u(x) = -\frac{x^2}{2} + c$$

für $c \in \mathbb{R}$ und damit

$$\varphi(x) = u(x)(2-x) = \left(-\frac{x^2}{2} + c\right) \cdot (2-x)$$

für alle $x < 2$.

Schließlich bestimmen wir die noch freie Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß $\varphi(1) = \frac{3}{2}$ gilt; wegen

$$\varphi(1) = \frac{3}{2} \iff -\frac{1}{2} + c = \frac{3}{2} \iff c = 2$$

ist

$$\varphi :]-\infty; 2[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \left(-\frac{x^2}{2} + 2\right) \cdot (2-x),$$

die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{1}{x-2} y + x^2 - 2x \quad \text{für } x < 2 \quad \text{mit } y(1) = \frac{3}{2};$$

der Funktionsterm von φ läßt sich noch zu

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} (4 - x^2) (2 - x) = \frac{1}{2} (2 + x) (2 - x)^2$$

für alle $x < 2$ umformen.

18. a) Für alle $x \in]-1; 1[$ gilt

$$\frac{1}{1+x} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{(1+x^2) - x \cdot (1+x)}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1-x}{(1+x)(1+x^2)} = a(x),$$

woraus sich wegen

$$a(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2}$$

damit etwa die Stammfunktion A mit

$$A(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \ln \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ergibt.

- b) Bei der gegebenen Differentialgleichung $(*) \quad y' = a(x)y$ handelt es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit der stetigen Koeffizientenfunktion $a :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$; damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c \cdot e^{A(x)} = c \cdot \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}},$$

mit $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $(*)$. Für die noch freie Konstante $c \in \mathbb{R}$ ergibt sich über die gegebene Anfangsbedingung $y(0) = 1$ dann

$$1 = \varphi_c(0) = c \cdot \frac{1+0}{\sqrt{1+0^2}} = c;$$

damit ist

$$\varphi_1 :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}},$$

die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

19. Für alle $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ gilt $\cos x > 0$ und damit

$$y'(x) \cdot \cos x - 2 \cdot y(x) \cdot \sin x = x \iff y'(x) = \frac{2 \sin x}{\cos x} \cdot y(x) + \frac{x}{\cos x};$$

folglich ist die inhomogene lineare Differentialgleichung $y' = a(x)y + b(x)$ erster Ordnung mit den stetigen Funktionen

$$a :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}, \quad a(x) = \frac{2 \sin x}{\cos x}, \quad \text{und} \quad b :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}, \quad b(x) = \frac{x}{\cos x},$$

zu betrachten. Da

$$A :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}, \quad A(x) = -2 \ln |\cos x| \underset{\cos x > 0}{=} -2 \ln(\cos x),$$

eine Stammfunktion von a ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c e^{A(x)} = c e^{-2 \ln(\cos x)} = c (e^{\ln(\cos x)})^{-2} = c (\cos x)^{-2},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)y$ dar.

Zur Behandlung der inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz der Variation der Konstanten

$$\varphi :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = u(x) (\cos x)^{-2},$$

mit einer differenzierbaren Funktion $u :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$. Wegen

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= u'(x) (\cos x)^{-2} + u(x) \cdot ((-2)(\cos x)^{-3}(-\sin x)) \\ &= u'(x) (\cos x)^{-2} + u(x) \cdot 2 (\cos x)^{-3} \sin x \end{aligned}$$

für alle $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist φ genau dann Lösung von $y' = a(x)y + b(x)$, wenn

$$u'(x)(\cos x)^{-2} + u(x) \cdot 2(\cos x)^{-3} \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos x} \cdot u(x)(\cos x)^{-2} + \frac{x}{\cos x},$$

also

$$u'(x)(\cos x)^{-2} = \frac{x}{\cos x} \quad \text{bzw.} \quad u'(x) = x \cos x$$

für alle $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ gilt. Wegen

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{w'(x)} dx &= \underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{w(x)} - \int \underbrace{1}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{w(x)} dx = \\ &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

ergibt sich

$$u(x) = x \sin x + \cos x + c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}$$

und damit

$$\varphi(x) = u(x)(\cos x)^{-2} = \frac{x \sin x + \cos x + c}{\cos^2 x}$$

für alle $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; die Gesamtheit dieser Funktionen stellt die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung dar.

20. Zu betrachten ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad y_1' &= y_1 + y_2 \\ \text{(II)} \quad y_2' &= y_2 + 1 \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 1$. Die zweite Gleichung (II) ist dabei die inhomogene lineare Differentialgleichung $y_2' = a(x)y_2 + b_2(x)$ mit den konstanten Funktionen

$$a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(x) = 1, \quad \text{und} \quad b_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b_2(x) = 1.$$

Da $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $A(x) = x$, eine Stammfunktion von a ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c e^{A(x)} = c e^x,$$

mit $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y_2' = y_2$ dar; ferner ist offensichtlich die konstante Funktion

$$\varphi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = -1,$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung $y_2' = y_2 + 1$. Damit ist

$$y_2 = \varphi_c + \varphi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_2(x) = c e^x - 1,$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, und wegen

$$y_2(0) = 1 \iff c e^0 - 1 = 1 \iff c = 2$$

erhalten wir

$$y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_2(x) = 2e^x - 1.$$

Damit ist aber die erste Gleichung (I) die inhomogene lineare Differentialgleichung $y_1' = a(x)y_1 + b_1(x)$ mit

$$a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(x) = 1, \quad \text{und} \quad b_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b_2(x) = 2e^x - 1.$$

Wir wählen nun den Ansatz $\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = u(x)e^x$, der Variation der Konstanten mit einer differenzierbaren Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wegen

$$\varphi_1'(x) = u'(x)e^x + u(x) \cdot e^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist φ_1 genau dann Lösung von $y_1' = a(x)y_1 + b_1(x)$, wenn

$$u'(x)e^x + u(x)e^x = 1 \cdot u(x)e^x + (2e^x - 1),$$

also

$$u'(x) = (2e^x - 1) \cdot e^{-x} = 2 - e^{-x},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Demnach ist

$$u(x) = 2x + e^{-x} + d$$

für eine Konstante $d \in \mathbb{R}$ und damit

$$\varphi_1(x) = u(x)e^x = (2x + e^{-x} + d)e^x = (2x + d)e^x + 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; wegen

$$y_1(0) = 1 \iff (2 \cdot 0 + d)e^0 + 1 = 1 \iff d = 0$$

erhalten wir

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = 2xe^x + 1.$$

Zusammenfassend erhalten wir die Lösung

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xe^x + 1 \\ 2e^x - 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$