MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/17
Blatt 3
07.11.2016

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt" — Bearbeitungsvorschlag —

9. Die (als Produkt und Komposition von Polynomfunktionen und der Exponentialfunktion insbesondere) stetige Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \cdot \left(-x^2+1\right),$$

besitzt auf der kompakten Einheitskreisscheibe

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

nach dem Satz von Weierstraß (mindestens) eine globale Minimalstelle und (mindestens) eine globale Maximalstelle, es gibt also (a,b) und $(c,d) \in D$ mit

$$f(a,b) \leq f(x,y) \leq f(c,d)$$

für alle $(x,y) \in D$; für die Lage dieser Extremstellen $(p,q) \in D$ gibt es die folgenden beiden Möglichkeiten:

- (p,q) liegt auf dem Rand von D, also auf der Kreislinie $x^2+y^2 = 1$ um $(0,0)$ mit Radius 1; wegen

$$f(p,q) = e^{-(p^2+q^2)} \cdot \left(-p^2+1\right) = e^{-1} \cdot q^2$$

  kommen hier nur $q = 0$ mit $p = \pm 1$, also $(\pm 1, 0)$, sowie $q = \pm 1$ mit $p = 0$, also $(0, \pm 1)$ in Frage.

- (p,q) liegt im Innern von D, also in der offenen Kreisscheibe $x^2+y^2 < 1$; da aber f partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= \left(e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2\,x)\right) \cdot \left(-x^2+1\right) + e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2\,x) \\ &= -2\,x \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot \left(2-x^2\right) \end{aligned}$$

  und

$$\begin{aligned} \partial_2 f(x,y) &= \left(e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2\,y)\right) \cdot \left(-x^2+1\right) \\ &= -2\,y \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot \left(1-x^2\right) \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist, muß (p,q) dann eine kritische Stelle von f sein, so daß wegen

$$\partial_1 f(p,q) = 0 \iff -2\,p \cdot \underbrace{e^{-(p^2+q^2)}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(2-p^2\right)}_{>0} \iff p = 0$$

und

$$\partial_2 f(p,q) = 0 \iff -2\,q \cdot \underbrace{e^{-(p^2+q^2)}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(1-q^2\right)}_{>0} \iff q = 0$$

kommt hier für (p,q) nur der Punkt $(0,0)$ in Frage.

Der Vergleich der Funktionswerte

(p,q)	$(1,0)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(0,-1)$	$(0,0)$
$f(p,q)$	0	0	e^{-1}	e^{-1}	1

zeigt, daß die Funktion f im Punkt $(0,0)$ ihr Maximum 1 sowie in den Punkten $(1,0)$ und $(-1,0)$ ihr Minimum 0 annimmt.

10. Die Einheitskreisscheibe

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

ist eine sowohl abgeschlossene als auch beschränkte und damit kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$; darüber hinaus ist die Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 - x + 2\,y^2,$$

als Polynomfunktion insbesondere stetig. Nach dem Satz von Weierstraß besitzt damit die stetige Funktion f auf der kompakten Menge M eine globale Minimalstelle $(p_1,q_1) \in M$ und eine globale Maximalstelle $(p_2,q_2) \in M$, für alle $(x,y) \in M$ gilt also $f(p_1,q_1) \leq f(x,y) \leq f(p_2,q_2)$.

Die Polynomfunktion f ist insbesondere partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in M$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) = 2\,x - 1 \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y) = 4\,y.$$

Damit kommen für globale Extremstellen $(p,q) \in M$ nur die beiden folgenden Fälle in Frage:

- Der Punkt (p,q) liegt auf dem Rand ∂M von M; wir betrachten für die Punkte der Einheitskreislinie ∂M die Darstellung $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ in Polarkoordinaten mit $\varphi \in [0; 2\pi]$ und erhalten

$$f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos^2\varphi - \cos\varphi + 2\,\sin^2\varphi.$$

Die differenzierbare Hilfsfunktion

$$h : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = \cos^2\varphi - \cos\varphi + 2\,\sin^2\varphi,$$

kann ihre Extremwerte in den Randpunkten $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ ihres Definitionsintervalls $[0; 2\pi]$ und auf $]0; 2\pi[$ in den Nullstellen ihrer Ableitung

$$h'(\varphi) = 2\cos\varphi \cdot (-\sin\varphi) - (-\sin\varphi) + 4\sin\varphi \cdot \cos\varphi =$$
$$= 2\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi = 2\,\sin\varphi \cdot \left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\right),$$

also für $\sin\varphi = 0$ und damit in $\varphi = \pi$ oder für $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ und damit in $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ oder $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ annehmen; damit kommen für (p, q) die Punkte $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ sowie $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ in Frage.

- Der Punkt (p, q) liegt im Innern $\overset{\circ}{M}$ von M; dann ist aber (p, q) ein kritischer Punkt von f, es gilt also $\operatorname{grad} f(p, q) = (0, 0)$, weswegen nur der Punkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ in Frage kommt.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(p, q)	$(1, 0)$	$(-1, 0)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
$f(p, q)$	0	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$

erkennt man, daß f in $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ das globale Minimum $-\frac{1}{4}$ sowie in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ das globale Maximum $\frac{9}{4}$ besitzt.

11. Die (als Polynomfunktion insbesondere) stetige Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + 4y^3 - 3x - 3y,$$

besitzt auf der sowohl abgeschlossenen als auch beschränkten und damit kompakten Teilmenge

$$Q = [-1, 1] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$$

nach dem Satz von Weierstraß (mindestens) eine globale Minimalstelle und (mindestens) eine globale Maximalstelle.

Da die Funktion f darüber hinaus partiell differenzierbar ist, wobei

$$\partial_1 f(x, y) = 3\,x^2 - 3 \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x, y) = 12\,y^2 - 3$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und damit insbesondere

$$\partial_1 f(x, y) = 3\left(x^2 - 1\right) < 0$$

für alle Punkte $(x, y) \in \overset{\circ}{Q}$ im Innern $\overset{\circ}{Q} =]-1, 1[\times]-1, 1[$ von Q gilt, kommen für globale Extremstellen $(a, b) \in Q$ von f nur Punkte (a, b) auf dem Rand ∂Q des Quadrats Q in Frage:

- Für die Punkte $(-1, t)$ mit $t \in [-1, 1]$ der linken bzw. $(1, t)$ mit $t \in [-1, 1]$ der rechten Quadratseite gilt

$$f(\pm 1, t) = (\pm 1)^3 + 4\,t^3 - 3 \cdot (\pm 1) - 3\,t = 4\,t^3 - 3\,t \mp 2;$$

da die (als Polynomfunktion insbesondere differenzierbare) Hilfsfunktion

$$h_1 : [-1;1] \to \mathbb{R}, \quad h_1(t) = 4\,t^3 - 3\,t \mp 2,$$

ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 1$, sowie in den Nullstellen ihrer Ableitung

$$h_1'(t) = 12\,t^2 - 3 = 12\left(t^2 - \frac{1}{4}\right) = 12\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right),$$

also in $t = -\frac{1}{2}$ und $t = \frac{1}{2}$ annehmen kann, kommen für (a,b) nur die Punkte $(\pm 1, -1)$, $\left(\pm 1, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\pm 1, \frac{1}{2}\right)$ und $(\pm 1, 1)$ in Frage.

- Für die Punkte $(t,-1)$ mit $t \in [-1,1]$ der unteren bzw. $(t,1)$ mit $t \in [-1,1]$ der oberen Quadratseite gilt

$$f(t, \pm 1) = t^3 + 4 \cdot (\pm 1)^3 - 3\,t - 3 \cdot (\pm 1) = t^3 - 3\,t \pm 1;$$

da die (als Polynomfunktion insbesondere differenzierbare) Hilfsfunktion

$$h_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad h(t) = t^3 - 3\,t \pm 1,$$

ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 1$, die hier mit den Nullstellen ihrer Ableitung

$$h_2'(t) = 3\,t^2 - 3 = 3\left(t^2 - 1\right) = 3\,(t+1)\,(t-1)\,,$$

zusammenfallen, annehmen kann, kommen für (a,b) nur die Punkte $(-1, \pm 1)$ und $(1, \pm 1)$ in Frage.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(a,b)	$(-1,-1)$	$(-1,-\frac{1}{2})$	$(-1,\frac{1}{2})$	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(1,-\frac{1}{2})$	$(1,\frac{1}{2})$	$(1,1)$
$f(a,b)$	1	3	1	3	-3	-1	-3	-1

erkennt man, daß f den maximalen Funktionswert 3 in den Punkten $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ und $(-1,1)$ sowie den minimalen Funktionswert -3 in den Punkten $(1,-1)$ und $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ annimmt.

12. Die Menge

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y - 1 \leq 0\right\}$$

ist das von den Geraden $x = 0$, $y = 0$ und $y = 1 - x$ begrenzte abgeschlossene Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ und damit insbesondere eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Folglich besitzt die (als Polynomfunktion) insbesondere stetige Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\,y\,(x + y - 1)\,,$$

nach dem Satz von Weierstraß auf dem Kompaktum M (mindestens) ein globales Minimum und (mindestens) ein globales Maximum. Dabei gilt für alle $(x,y) \in M$

$$f(x,y) = \underbrace{x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{y}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x + y - 1)}_{\leq 0} \leq 0$$

mit
$$f(x,y)=0 \iff x=0 \quad \text{oder} \quad y=0 \quad \text{oder} \quad y=1-x;$$
folglich besitzt die Funktion f genau in den Randpunkten von M ihre globalen Maximalstellen, und es gilt
$$\sup f(M)=0.$$
Eine globale Minimalstelle $(p,q)\in M$ von f muß demnach im Innern
$$\overset{\circ}{M}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y>0,\ x+y-1<0\right\}$$
des Dreiecks M liegen; da f (als Polynomfunktion) insbesondere partiell differenzierbar ist, kommen dabei hierfür nur kritische Stellen von f in Frage. Für alle $(x,y)\in\overset{\circ}{M}$ gilt
$$f(x,y)=x\,y\,(x+y-1)=x^2\,y+x\,y^2-x\,y$$
und damit
$$\partial_1 f(x,y)=2\,x\,y+y^2-y \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y)=x^2+2\,x\,y-x,$$
weswegen wir
$$\partial_1 f(x,y)=0 \iff (2\,x+y-1)\,y=0 \underset{y>0}{\iff} 2\,x+y=1$$
und
$$\partial_2 f(x,y)=0 \iff (x+2\,y-1)\,x=0 \underset{x>0}{\iff} x+2\,y=1$$
erhalten. Für ein globales Minimum $(p,q)\in M$ von f muß also
$$\text{sowohl} \quad 2\,p+q=1 \quad \text{als auch} \quad p+2\,q=1,$$
also $p=1-2\,q$ und damit $2\,(1-2\,q)+q=1$ bzw. $2-3\,q=1$, und schließlich $q=\frac{1}{3}$ und $p=\frac{1}{3}$ gelten; somit ergibt sich
$$\inf f(M)=f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-1\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}.$$