MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/17
Blatt 2
31.10.2016

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Bearbeitungsvorschlag —

5. a) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = (2\,x_1 - x_2)^3,$$

ist partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = 3\,(2\,x_1 - x_2)^2 \cdot 2 = 6\,(2\,x_1 - x_2)^2$$

und

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = 3\,(2\,x_1 - x_2)^2 \cdot (-1) = -3\,(2\,x_1 - x_2)^2$$

für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

b) Die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2,$$

ist partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 g(x_1, x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2$$

und

$$\partial_2 g(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot (-\sin x_2) = -\sin x_1 \cdot \sin x_2$$

für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

c) Die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = (x_1^2 + 10\,x_1\,x_2 + x_2^2)\,e^{x_1^2 + x_2^2},$$

ist partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 h(x_1, x_2) = (2\,x_1 + 10\,x_2) \cdot e^{x_1^2+x_2^2} + (x_1^2 + 10\,x_1\,x_2 + x_2^2) \cdot \left(e^{x_1^2+x_2^2} \cdot (2\,x_1)\right) =$$
$$= (2\,x_1 + 10\,x_2 + 2\,x_1^3 + 20\,x_1^2\,x_2 + 2\,x_1\,x_2^2)\,e^{x_1^2+x_2^2}$$

und

$$\partial_2 h(x_1, x_2) = (10\,x_1 + 2\,x_2) \cdot e^{x_1^2+x_2^2} + (x_1^2 + 10\,x_1\,x_2 + x_2^2) \cdot \left(e^{x_1^2+x_2^2} \cdot (2\,x_2)\right) =$$
$$= (10\,x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_1^2\,x_2 + 20\,x_1\,x_2^2 + 2\,x_2^3)\,e^{x_1^2+x_2^2}$$

für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

d) Die Wurzelfunktion $w : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $w(t) = \sqrt{t}$, ist auf $\mathbb{R}^+$ differenzierbar; damit ist die Funktion

$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad k(x_1, x_2) = x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

zumindest für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 k(x_1, x_2) = x_2 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (2\, x_1) \right) = \frac{x_1\, x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

und

$$\partial_2 k(x_1, x_2) = 1 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_2 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (2\, x_2) \right) = \frac{x_1^2 + 2\, x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Darüber hinaus ist die Funktion

$$k_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k_1(x_1) = k(x_1, 0) = 0,$$

differenzierbar, insbesondere für $a_1 = 0$ gilt dann $\partial_1 k(0,0) = k_1'(0) = 0$; die Funktion

$$k_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k_2(x_2) = k(0, x_2) = x_2 \sqrt{x_2^2} = x_2\, |x_2|,$$

ist wegen

$$\frac{k_2(x_2) - k_2(0)}{x_2 - 0} = \frac{x_2\, |x_2|}{x_2} = |x_2| \underset{x_2 \to 0}{\longrightarrow} 0$$

im Punkt $a_2 = 0$ differenzierbar mit $\partial_2 k(0,0) = k_2'(0) = 0$.

6. Wir betrachten für die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \sin x \cdot \arctan \left(\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

ihren Differenzenquotienten im Punkt $a = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ in x–Richtung

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{\sin h \cdot \arctan \left(\ln \frac{1}{\sqrt{h^2+0^2}} \right)}{h} = \frac{\sin h}{h} \cdot \arctan \left(\ln \frac{1}{|h|} \right)$$

für alle $h \neq 0$ und untersuchen, ob sein Grenzwert für $h \to 0$ existiert. Der erste Faktor läßt sich mit der Regel von de l'Hospital behandeln, und es ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h}{1} = \frac{1}{1} = 1;$$

für den zweiten Faktor ergibt sich direkt

$$\lim_{h \to 0} \arctan \underbrace{\left(\ln \underbrace{\frac{1}{|h|}}_{\to \infty} \right)}_{\to \infty} = \frac{\pi}{2},$$

so daß man insgesamt

$$\lim_{h\to 0}\left(\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\arctan\left(\ln\frac{1}{|h|}\right)}_{\to\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{2}$$

erhält. Folglich existiert die partielle Ableitung von f nach der 1. Variablen im Punkt $(0,0)$, und es gilt

$$\partial_1 f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{\pi}{2}.$$

7. Das Rechteck

$$D=[-1,1]\times[0,2\pi]$$

ist eine sowohl abgeschlossene als auch beschränkte und damit kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$; darüber hinaus ist die Funktion

$$f:D\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=x+e^x\cos y,$$

als Summe und Produkt einer linearen Funktion sowie der Exponenentialfunktion und des Cosinus insbesondere stetig. Nach dem Satz von Weierstraß besitzt damit die stetige Funktion f auf der kompakten Menge D (mindestens) eine globale Minimalstelle und (mindestens) eine globale Maximalstelle.

Da die Funktion f darüber hinaus partiell differenzierbar ist, wobei

$$\partial_1 f(x,y)=1+e^x\cos y\qquad\text{und}\qquad\partial_2 f(x,y)=-e^x\sin y$$

für alle $(x,y)\in D$ gilt, kommen für globale Extremstellen $(a,b)\in D$ von f nur die beiden Fälle in Frage:

- Der Punkt (a,b) liegt auf dem Rand ∂D von D; wir betrachten die vier Rechtecksseiten und greifen dabei auf bekannte Eigenschaften der Exponentialfunktion sowie des Cosinus zurück:
  - Für die Punkte $(-1,t)$ mit $t\in[0,2\pi]$ der linken Rechtecksseite gilt

    $$f(-1,t)=-1+e^{-1}\cos t;$$

    damit kommen für (a,b) nur die Punkte $(-1,0)$, $(-1,\pi)$ und $(-1,2\pi)$ in Frage.
  - Für die Punkte $(1,t)$ mit $t\in[0,2\pi]$ der rechten Rechtecksseite gilt

    $$f(1,t)=1+e\cos t;$$

    damit kommen für (a,b) nur die Punkte $(1,0)$, $(1,\pi)$ und $(1,2\pi)$ in Frage.

– Für die Punkte $(t, 0)$ bzw. $(t, 2\pi)$ mit $t \in [-1, 1]$ der unteren bzw. oberen Rechtecksseite gilt

$$f(t, 0) = t + e^t = f(t, 2\pi);$$

da dieser Ausdruck in t streng monoton wachsend ist, kommen für (a, b) nur die Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ bzw. $(-1, 2\pi)$ und $(1, 2\pi)$ in Frage.

- Der Punkt (a, b) liegt im Innern

$$\overset{\circ}{D} =]-1, 1[\times]0, 2\pi[$$

von D; dann ist aber (a, b) schon ein kritischer Punkt von f, es gilt also $\operatorname{grad} f(a, b) = (0, 0)$. Aus

$$\partial_2 f(a, b) = -e^a \sin b = 0$$

folgt zunächst $\sin b = 0$, also $b = \pi$, woraus sich mit

$$\partial_1 f(a, b) = 1 + e^a \cos b \underset{b=\pi}{=} 1 - e^a = 0$$

dann $e^a = 1$, also $a = 0$, ergibt; hier ist damit $(a, b) = (0, \pi)$.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(a, b)	$(-1, 0)$	$(-1, \pi)$	$(-1, 2\pi)$	$(1, 0)$	$(1, \pi)$	$(1, 2\pi)$	$(0, \pi)$
$f(a, b)$	$-1 + \frac{1}{e}$	$-1 - \frac{1}{e}$	$-1 + \frac{1}{e}$	$1 + e$	$1 - e$	$1 + e$	-1

erkennt man wegen

$$1 - e < -1 - \frac{1}{e} < -1 < -1 + \frac{1}{e} < 1 + e,$$

daß f in $(1, \pi)$ eine globale Minimalstelle sowie in $(1, 0)$ und $(1, 2\pi)$ globale Maximalstellen besitzt.

8. Die Betragsfunktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = |t|$, ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar; damit ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = |x - y| \cdot y,$$

zunächst an allen Stellen $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a \neq b$ partiell differenzierbar. Es bleiben also nur noch die Punkte (a, a) mit $a \in \mathbb{R}$ der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten zu untersuchen:

- Für den Differenzenquotienten der Funktion

$$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_1(x) = f(x, a) = |x - a| \cdot a,$$

an der Stelle $x = a$ gilt

$$\frac{g_1(a + h) - g_1(a)}{h} = \frac{f(a + h, a) - f(a, a)}{h} = \frac{|h| \cdot a - 0}{h} = \frac{|h|}{h} \cdot a$$

für alle $h \neq 0$. Wegen

$$\lim_{h \to 0+} \frac{g_1(a+h) - g_1(a)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{|h|}{h} \cdot a \underset{h>0}{=} a$$

und

$$\lim_{h \to 0-} \frac{g_1(a+h) - g_1(a)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{|h|}{h} \cdot a \underset{h<0}{=} -a$$

ist g_1 an der Stelle $x = a$ genau dann differenzierbar, wenn $a = -a$ gilt, $\partial_1 f(a,a)$ existiert also genau im Falle $a = 0$.

- Für den Differenzenquotienten der Funktion

$$g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_2(y) = f(a,y) = |a-y| \cdot y,$$

an der Stelle $y = \alpha$ gilt

$$\frac{g_2(a+h) - g_2(a)}{h} = \frac{f(a,a+h) - f(a,a)}{h} = \\ = \frac{|-h| \cdot (a+h) - 0}{h} = \frac{|h|}{h} \cdot (a+h)$$

für alle $h \neq 0$. Wegen

$$\lim_{h \to 0+} \frac{g_2(a+h) - g_2(a)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{|h|}{h} \cdot (a+h) \underset{h>0}{=} a$$

und

$$\lim_{h \to 0-} \frac{g_2(a+h) - g_2(a)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{|h|}{h} \cdot (a+h) \underset{h<0}{=} -a$$

ist g_2 an der Stelle $y = a$ genau dann differenzierbar, wenn $a = -a$ gilt, $\partial_2 f(a,a)$ existiert also genau im Falle $a = 0$.

Damit ist die Funktion f an denen vom Nullpunkt $(0,0)$ verschiedenen Punkten der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten nicht partiell differenzierbar.