

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

49. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2004*). Man untersuche die ebenen Quadriken

$$Q_1 : x^2 + 2xy + 3y^2 = 1,$$

$$Q_2 : x^2 + 4xy + 6y^2 = 1$$

auf metrische und affine Äquivalenz.

50. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2014*). Gegeben seien die Kegelschnitte

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 - 2x_2 + 1 = 0\}$$

und

$$Q_t = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + tx_2^2 - 2tx_2 + t - 1 = 0\}.$$

Für welche Werte des reellen Parameters t sind Q und Q_t kongruent?

51. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2013*).

a) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch die Gleichung

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 - 2\sqrt{2}x + 14\sqrt{2}y + 10 = 0$$

gegebene Quadrik. Man bestimme ihre euklidische Normalform $Q' \subseteq \mathbb{R}^2$.

b) Man gebe eine Bewegung f von $\mathbb{R}^2$ an, welche Q' in Q überführt.

52. (*Klausuraufgabe Sommersemester 2013*). In Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ betrachte man die Quadrik

$$Q_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2xy + (a+1)y^2 - 2ay + a - 1 = 0 \right\}.$$

a) Man zeige, daß die Quadrik Q_a für $a < 0$ eine Hyperbel, für $a = 0$ ein Parallelenpaar und für $a > 0$ eine Ellipse darstellt.

b) Man begründe, daß die beiden Quadriken

$$Q_1 : x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y = 0 \quad \text{und} \quad Q_2 : x^2 - 2xy + 3y^2 - 4y + 1 = 0$$

affin äquivalent sind, und gebe eine Affinität $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(Q_1) = Q_2$ an.

Abgabe bis Donnerstag, den 7. Februar 2017, 10⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).