MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/17
Blatt 9
20.12.2016

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt"

33. a) Man bestimme die Gleichung einer Ellipse E, die die Scheitel $(\pm\frac{25}{2};0)$ besitzt und zudem den Punkt $(\frac{15}{2};6)$ enthält, und skizziere E.

    b) Man bestimme die Gleichung einer Hyperbel H mit den Brennpunkten $(\pm 10;0)$ und den Asymptoten $y=\pm\frac{3}{4}\,x$, und skizziere H.

    c) Man bestimme den im 1. Quadranten liegenden Schnittpunkt S von E und H und bestimme die Gleichung der Tangente an E bzw. H in S.

34. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1998).* Für die reellen Zahlen $0<b\leq a$ sei

$$E=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$$

die Ellipse in der euklidischen Ebene mit den Brennpunkten

$$f_1=(-e,0) \quad \text{und} \quad f_2=(e,0) \qquad \text{mit} \qquad e=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Weiter sei $p\in E$ und T die Tangente an E durch p. Man zeige

$$d(T,f_1)\cdot d(T,f_2)=b^2.$$

35. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2000).* Im euklidischen $\mathbb{R}^2$ sei die Hyperbel

$$H=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$$

mit ihren Asymptoten A_1 und A_2 gegeben; weiter sei $p_0\in H$ und T die Tangente an H in p_0. Man berechne die Schnittpunkte p_i von A_i und T für $i=1,2$ und zeige, daß der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken $m=(0,0)$, p_1 und p_2 gleich $a\,b$ ist.

36. Im euklidischen $\mathbb{R}^2$ seien die Ellipse E und die Hyperbel H mit

$$E=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\} \quad \text{und} \quad H=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$$

gegeben; dabei bezeichnen F_1 und F_2 die beiden Brennpunkte von E bzw. H.

    a) Man zeige die Brennpunkteigenschaft der Ellipse

$$E=\left\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a\right\}.$$

    b) Man zeige die Brennpunkteigenschaft der Hyperbel

$$H=\left\{P\in\mathbb{R}^2 \mid |d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a\right\}.$$

Abgabe bis Dienstag, den 10. Januar 2017, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).