

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

25. a) Man zeige, daß die Funktionen \sinh und \cosh sowie \sin und \cos Lösungen der Differentialgleichung $y'''' - y = 0$ sind.
b) Man löse das Anfangswertproblem

$$y'''' - y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = -2.$$

26. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2003*). Für den Parameter $a \in \mathbb{R}$ sei die Differentialgleichung

$$y'' + 2a y' + a^2 y = 0.$$

gegeben; ferner sei $b > 0$ fest gewählt. Für welches $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y(1) = b$? Wie lautet sie? Man bestimme auch (in Abhängigkeit von b) das Verhalten dieser Lösung für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$.

27. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2003*). Man bestimme alle Zahlen $a \in \mathbb{R}$, für die alle Lösungen φ der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + ay = 0$$

der Bedingung $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$ genügen.

28. Man betrachte für $x > 0$ die beiden Differentialgleichungen

$$(*) \quad y'' + \left(\frac{4}{x} - 3\right) y' + \left(\frac{2}{x^2} - \frac{6}{x} - 4\right) y = 0,$$

$$(**) \quad z'' - 3z' - 4z = 0.$$

- a) Man zeige: die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau eine Lösung von (*), wenn die Funktion $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) = x^2 \varphi(x)$, eine Lösung von (**) ist.
b) Man bestimme die allgemeine Lösung von (**).
c) Man bestimme eine Lösung φ von (*) mit $\varphi(1) = 1$ und $\varphi'(1) = -3$.

Abgabe bis Dienstag, den 13. Dezember 2016, 10⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).