Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

9. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2002*). Gegeben sei die Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sin(xy),$$

mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x \geq 0, y \geq 0\}$. Man bestimme

- die Menge M_1 aller $(a, b) \in D$ mit $f(x, y) \leq f(a, b)$ für alle $(x, y) \in D$.
- die Menge M_2 aller $(a, b) \in D$ mit $f(a, b) \leq f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D$.

Man begründe, warum M_1 und M_2 nicht leer sind.

10. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2013*). Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x + y) e^{xy}.$$

- Man zeige, daß f keine kritischen Punkte besitzt.
- Man bestimme die globalen Extremstellen von f auf der Kreisscheibe

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

11. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2016*). Für eine fest gewählte reelle Zahl $r > 0$ betrachte man die Menge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

sowie die Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - r^2).$$

Man skizziere $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und bestimme alle globalen Extremstellen von f auf D .

12. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2015*). Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

- Man zeige, daß f partiell differenzierbar ist, und bestimme die partiellen Ableitungen $\partial_1 f(x_1, x_2)$ und $\partial_2 f(x_1, x_2)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.
- Man zeige, daß f zweimal partiell differenzierbar ist, im Nullpunkt aber $\partial_1 \partial_2 f(0, 0) \neq \partial_2 \partial_1 f(0, 0)$ gilt.
- Ist f stetig an der Stelle $(0, 0)$?

Abgabe bis Dienstag, den 15. November 2016, 10⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).