MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 9
08.12.2014

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

33. a) Man skizziere die Ellipse E mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

und bestimme ihre Scheitel und ihre Brennpunkte.

b) Man skizziere die Hyperbel H mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

und bestimme ihre Scheitel, ihre Brennpunkte und ihre Asymptoten.

c) Man bestimme y_0, so daß der Punkt $P_0 = (5, y_0)$ auf der Hyperbel H liegt, und gebe die Gleichung der Tangente an H im Punkt P_0 an.

34. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2005).* Seien a, b reelle Zahlen mit $0 < b < 1 < a$. In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ seien zwei Kegelschnitte Q_1 und Q_2 durch ihre Gleichungen

$$Q_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1 \qquad \text{und} \qquad Q_2 : \frac{x^2}{1 - b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben.

a) Man berechne die Schnittpunkte von Q_1 und Q_2.

b) Man bestimme für $i = 1, 2$ die Tangente $T_S Q_i$ in

$$S = \left(a\sqrt{1 - b^2},\, b\sqrt{a^2 - 1}\right) \in Q_1 \cap Q_2.$$

Man zeige, daß sich die Tangenten $T_S Q_1$ und $T_S Q_2$ unter einem rechten Winkel schneiden.

35. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2005).* In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sei die Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ gegeben. Weiter sei $a \in \mathbb{R}$ fest gewählt.

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ schneidet die Gerade $y = a\,x + t$ die Parabel in zwei verschiedenen Punkten? Man berechne für diese t den Mittelpunkt $M_{a,t}$ der Verbindungsstrecke beider Schnittpunkte.

b) Welche Punktmenge G_a beschreibt der Mittelpunkt $M_{a,t}$ bei festem a und variablem t?

c) Man fertige eine Skizze zur qualitativen Beschreibung dieses Phänomens an.

36. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008).*

Es seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Die Hyperbel im $\mathbb{R}^2$ mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hat bekanntlich die Asymptoten mit den Gleichungen

$$g_1 \;:\; y = \frac{b}{a} \cdot x \qquad \text{und} \qquad g_2 \;:\; y = -\frac{b}{a} \cdot x.$$

a) Man berechne die Abstände des Punktes $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ zu den beiden Asymptoten.

b) Man zeige, daß für alle Punkte P auf der Hyperbel das Produkt dieser beiden Abstände gleich ist.