MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 11
23.12.2014

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

41. Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 - 2\,x_2^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}\,x_1 - \frac{4}{\sqrt{5}}\,x_2 - 4 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -\frac{8}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = -4 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\,E_2) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 2^2 = \\ &= \left(-2 + \lambda + \lambda^2\right) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3$; wegen

$$A - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -3$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top AP = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot P^\top AP \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

über, also

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{8}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - 4 = 0,$$

und damit

$$2\,y_1^2 - 3\,y_2^2 - 4\,y_1 - 4 = 0.$$

Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$2\left(y_1^2 - 2\cdot 1\cdot y_1 + 1^2\right) - 3\,y_2^2 = 4 + 2\cdot 1^2,$$

also

$$2\,(y_1 - 1)^2 - 3\,y_2^2 = 6,$$

so daß sich mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - 1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dann

$$2\,z_1^2 - 3\,z_2^2 = 6, \qquad \text{also} \qquad \frac{z_1^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} - \frac{z_2^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Hyperbel ergibt.

42. Es ist

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \right\}$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $c = -4 \in \mathbb{R}$. Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - (-1)^2 = (\lambda - 2)\cdot\lambda$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$ mit den normierten Eigenvektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit der orthogonalen Matrix

$P=(v_1,v_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ und der Diagonalmatrix $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ gilt dann mit $P^\top A P = D$; mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix}u & v\end{pmatrix} P^\top A P \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} + b^\top P \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix}u & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} - 4 = 0,$$

und damit

$$2\,u^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}\,u - \frac{2}{\sqrt{2}}\,v - 4 = 0.$$

Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$2\left(u^2 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot u + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) - \sqrt{2}\,v - 4 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0,$$

also

$$2\left(u-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \sqrt{2}\left(v+\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = 0,$$

so daß sich mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix}w\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ v+\frac{5}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ dann

$$2\,w^2 - \sqrt{2}z = 0, \qquad \text{also} \qquad \sqrt{2}\,w^2 - z = 0,$$

die euklidische Normalform einer Parabel ergibt.

43. Der gegebene Kegelschnitt

$$P = \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2\,s\,x\,y + y^2 + 2\,x + 2\,y + 1 = 0\right\}.$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + b^\top\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A=\begin{pmatrix}1 & s\\ s & 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b=\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 1\in\mathbb{R}.$$

Dabei ist der Kegelschnitt P genau dann eine Parabel, wenn er ohne Mittelpunkt ist, also das lineare Gleichungssystem $A\cdot m = -\frac{1}{2}\,b$ keine Lösung besitzt: wegen

$$(A\,|\,-\tfrac{1}{2}\,b) = \left(\begin{array}{cc|c}1 & s & -1\\ s & 1 & -1\end{array}\right) \underset{\mathrm{II}-s\cdot\mathrm{I}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cc|c}1 & s & -1\\ 0 & 1-s^2 & -1+s\end{array}\right)$$

ist dies genau für $1 - s^2 = 0$ und $-1 + s \neq 0$, also für $s = -1$ der Fall. Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - (-1)^2 = (\lambda - 2) \cdot \lambda$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$; wegen

$$A - \lambda_1 \, E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_2 \, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Mit der orthogonalen Matrix

$$T = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

gilt dann $T^\top A T = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} T^\top A T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 1 = 0,$$

und damit

$$2\,u^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\, v + 1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 2\,u^2 + \frac{4}{\sqrt{2}} \left(v + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = 0.$$

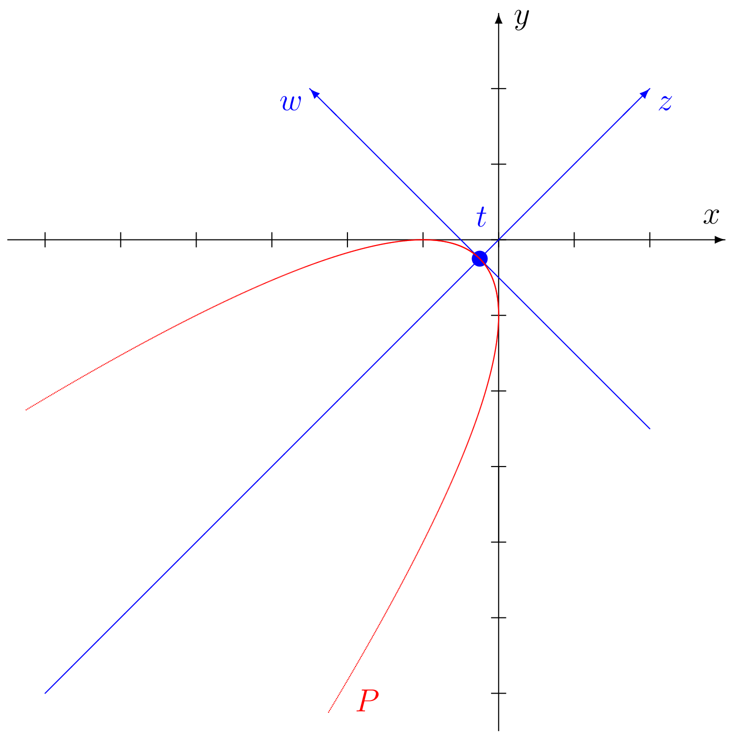
Mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v + \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$ dann

$$2\,w^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\, z = 0, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\, w^2 + z = 0,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Parabel ergibt. Insgesamt ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} w \\ z - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \\ &= T \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{=t}; \end{aligned}$$

es ist t der Scheitel und die z–Achse $t + \mathbb{R} \cdot v_2$ die Symmetrieachse von P.



44. Für den Abstand $d(X,P)$ des Punktes $X = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vom Punkt $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gilt

$$d(X,P) = \|X - P\| = \left\| \begin{pmatrix} p-3 \\ q-4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(p-3)^2 + (q-4)^2}.$$

Ferner besitzt die Gerade $L = \mathbb{R} \cdot u_L$ mit dem Richtungsvektor $u_L = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ den Normalenvektor

$$\widetilde{u}_L = u_L^{\perp} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{der Länge} \qquad \|\widetilde{u}_L\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

und damit die Hessesche Normalform

$$L \quad : \quad \frac{3\,x + 4\,y}{5} = 0;$$

für den Abstand $d(X,L)$ des Punktes X von der Geraden L gilt demnach

$$d(X,L) = \left| \frac{3\,p + 4\,q}{5} \right|.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} d(X,P) = d(X,L) \quad &\iff \quad \sqrt{(p-3)^2+(q-4)^2} = \left|\frac{3\,p+4\,q}{5}\right| \\ &\iff \quad (p-3)^2+(q-4)^2 = \left(\frac{3\,p+4\,q}{5}\right)^2 \\ &\iff \quad p^2-6p+9+q^2-8q+16 = \frac{9p^2+24pq+16q^2}{25} \\ &\iff \quad \frac{16}{25}p^2 - \frac{24}{25}pq + \frac{9}{25}q^2 - 6p - 8q + 25 = 0 \\ &\iff \quad 16p^2 - 24pq + 9q^2 - 150p - 200q + 625 = 0 \end{aligned}$$

Folglich ist die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ aller Punkte X, die vom Punkt P und der Geraden L denselben Abstand haben, die Quadrik

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 16p^2 - 24pq + 9q^2 - 150p - 200q + 625 = 0 \right\};$$

sie besitzt also die Gleichung

$$\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -150 \\ -200 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 625 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 16-\lambda & -12 \\ -12 & 9-\lambda \end{vmatrix} &= (16-\lambda)\cdot(9-\lambda) - (-12)^2 = \\ &= \left(144 - 25\,\lambda + \lambda^2\right) - 144 = \lambda^2 - 25\,\lambda = (\lambda - 25)\cdot\lambda \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = 0$; wegen

$$A - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 25$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E_2 = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Mit der orthogonalen Matrix

$$S = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $S^\top A S = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} S^\top A S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -150 & -200 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 625 = 0,$$

und damit

$$25\,u^2 - 250\,v + 625 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad u^2 - 10\,v + 25 = 0.$$

Es ergibt sich damit

$$u^2 - 10\left(v - \frac{5}{2}\right) = 0,$$

mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v - \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ also in

$$w^2 - 10\,z = 0, \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{10} - z = 0,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Parabel.