MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 10
16.12.2014

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt" — Lösungsvorschlag —

37. Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 14\,x^2 - 4\,x\,y + 11\,y^2 - 28\,x + 4\,y + 13 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -28 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 13 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\,E) &= \begin{vmatrix} 14-\lambda & -2 \\ -2 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (14-\lambda)\,(11-\lambda) - (-2)^2 = \\ &= 154 - 25\,\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 25\,\lambda + 150 = (\lambda - 10)\,(\lambda - 15) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 10$ und $\lambda_2 = 15$; wegen

$$A - \lambda_1\,E = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 10$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 15$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{||v_1||}, \frac{v_2}{||v_2||} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top AP = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot P^\top AP \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -28 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 13 = 0,$$

und damit

$$10\,u^2 + 15\,v^2 - \frac{20}{\sqrt{5}}\,u + \frac{60}{\sqrt{5}}\,v + 13 = 0$$

über. Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner

$$10\left(u^2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot u + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\right) + 15\left(v^2 + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot v + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\right) = \\ = -13 + 10\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 15\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2$$

und damit

$$10\left(u - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 15\left(v + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1,$$

so daß sich mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ v + \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$10\,w^2 + 15\,z^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2} = 1$$

ergibt; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform dar. Insgesamt ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w + \frac{1}{\sqrt{5}} \\ z - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \\ = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=t};$$

damit ist

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + t,$$

eine Bewegung, die die Ellipse

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2} = 1 \right\}$$

in euklidischer (metrischer) Normalform auf die gegebene Quadrik Q abbildet. Folglich ist Q eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, den Hauptachsen

$$t + \mathbb{R} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t + \mathbb{R} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie den den Hauptachsenabschnitten der Länge $\frac{1}{\sqrt{10}}$ und $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

38. Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 7\,x^2 + 48\,x\,y - 7\,y^2 - 6\,x + 8\,y = 0 \right\}.$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 0 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A - \lambda\,E) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 24 \\ 24 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)\,(-7-\lambda) - 24^2 = (\lambda - 25)\,(\lambda + 25)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = -25$; wegen

$$A - \lambda_1\,E = \begin{pmatrix} -18 & 24 \\ 24 & -32 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 25$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E = \begin{pmatrix} 32 & 24 \\ 24 & 18 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -25$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{||v_1||}, \frac{v_2}{||v_2||} \right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top AP = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot P^\top AP \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0,$$

und damit

$$25\,u^2 - 25\,v^2 + 10\,v = 0$$

über. Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner

$$25\,u^2 - 25\left(v^2 - 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot v + \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) = -25\,\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

und damit

$$\left(v - \frac{1}{5}\right)^2 - u^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

so daß sich mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v - \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$\frac{z^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} - \frac{w^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 1$$

ergibt; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform einer Hyperbel dar.

39. a) Die gegebenen Geraden $g = t_g + \mathbb{R} \cdot u_g$ und $h = t_h + \mathbb{R} \cdot u_h$ mit

$$t_g = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_g = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad t_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

besitzen die Normalenvektoren

$$\widetilde{u}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad \widetilde{u}_h = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit die Gleichungen

$$g \quad : \quad \widetilde{u}_g \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \widetilde{u}_g \circ t_g, \qquad \text{also} \qquad x + 3\,y = 24,$$

und

$$h \quad : \quad \widetilde{u}_h \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \widetilde{u}_h \circ t_h, \qquad \text{also} \qquad 3\,x + y = 8;$$

wegen $||\widetilde{u}_g|| = \sqrt{10}$ und $||\widetilde{u}_h|| = \sqrt{10}$ ist

$$\frac{x + 3\,y - 24}{\sqrt{10}} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{3\,x + y - 8}{\sqrt{10}} = 0$$

die Hessesche Normalform von g bzw. h, und man erhält

$$d(P, g) = \left| \frac{x + 3\,y - 24}{\sqrt{10}} \right| \qquad \text{und} \qquad d(P, h) = \left| \frac{3\,x + y - 8}{\sqrt{10}} \right|.$$

b) Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad d(P, g)^2 + d(P, h)^2 = 40;$$

dabei gilt

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{x + 3\,y - 24}{\sqrt{10}} \right)^2 + \left(\frac{3\,x + y - 8}{\sqrt{10}} \right)^2 = 40 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x + 3\,y - 24)^2 + (3\,x + y - 8)^2 = 400 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(x^2 + 9\,y^2 + 576 + 6\,x\,y - 48\,x - 144\,y \right) + \\
&\qquad\quad + \left(9\,x^2 + y^2 + 64 + 6\,x\,y - 48\,x - 16\,y \right) = 400 \\
&\Longleftrightarrow \quad 10\,x^2 + 10\,y^2 + 640 + 12\,x\,y - 96\,x - 160\,y = 400 \\
&\Longleftrightarrow \quad 5\,x^2 + 6\,x\,y + 5\,y^2 - 48\,x - 80\,y + 120 = 0.
\end{aligned}$$

c) Die in b) ermittelte Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5\,x^2 + 6\,x\,y + 5\,y^2 - 48\,x - 80\,y + 120 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -48 \\ -80 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 120 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A - \lambda\,E) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)^2 - 3^2 = (2 - \lambda)\,(8 - \lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 8$; wegen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 8$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{||v_1||}, \frac{v_2}{||v_2||} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot P^\top A P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -48 & -80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 120 = 0,$$

und damit

$$2\,u^2 + 8\,v^2 + \frac{32}{\sqrt{2}}\,u - \frac{128}{\sqrt{2}}\,v + 120 = 0$$

über. Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} 2\left(u^2 + 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot u + \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 \right) + 8\left(v^2 - 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot v + \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 \right) &= \\ = -120 + 2\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

und damit

$$2\left(u + \frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8\left(v - \frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 = 200,$$

so daß sich mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \frac{8}{\sqrt{2}} \\ v - \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$2\,w^2 + 8\,z^2 = 200 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{10^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1$$

ergibt; dabei ist insgesamt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w - \frac{8}{\sqrt{2}} \\ z + \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} -\frac{8}{\sqrt{2}} \\ \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{8}{\sqrt{2}} \\ \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}}_{=t}.$$

Damit ist

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + t,$$

eine Bewegung, die die Ellipse

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{w^2}{10^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1 \right\}$$

in euklidischer (metrischer) Normalform auf die Quadrik Q abbildet; folglich ist Q eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $t = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, den Hauptachsen

$$t + \mathbb{R} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t + \mathbb{R} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie den den Hauptachsenabschnitten der Länge 10 und 5.

40. a) Die Gerade b durch die Punkte $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ besitzt den Trägerpunkt A und den Richtungsvektor $u_b = C - A = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}$, folglich den Normalenvektor $\widetilde{u}_b = u_b^{\perp} = \begin{pmatrix} -t \\ t+1 \end{pmatrix}$, und damit die Gleichung

$$\widetilde{u}_b \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \widetilde{u}_b \circ A \qquad \text{bzw.} \qquad -\,t\,x + (t+1)\,y = t.$$

b) Die Höhe h_B des Dreiecks ABC durch die Ecke $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht auf der Seite b durch die Ecken A und C senkrecht; folglich besitzt h_B den Trägerpunkt B und den Normalenvektor u_b und folglich die Gleichung

$$u_b \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u_b \circ B \qquad \text{bzw.} \qquad (t+1)\,x + t\,y = t+1.$$

c) Die Seite durch die Ecken A und B stimmt mit der x–Achse überein; daher ist die Höhe h_C durch den Punkt C eine Parallele zur y–Achse und besitzt die Gleichung $x = t$. Die Koordinaten des Höhenschnittpunkts $H = \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix}$ des Dreiecks ABC müssen nun den Gleichungen der beiden Höhen h_B und h_C genügen; aus

$$(t+1)\, x_H + t\, y_H = t+1 \qquad \text{und} \qquad x_H = t$$

folgt zunächst $(t+1)\, t + t\, y_H = t+1$, also

$$t\, y_H = (t+1) - (t+1)\, t = (t+1)\,(1-t) = 1 - t^2,$$

und wegen $t \neq 0$ ergibt sich

$$y_H = \frac{1-t^2}{t} = \frac{1}{t} - t.$$

d) Die Koordinaten $x_t = t$ und $y_t = \frac{1}{t} - t$ des Höhenschnittpunkts H genügen der Gleichung

$$y = \frac{1}{t} - t = \frac{1}{x} - x \qquad \text{bzw.} \qquad x\, y = 1 - x^2;$$

damit liegt H auf der Quadrik Q des $\mathbb{R}^2$ mit der Gleichung

$$x^2 + x\, y - 1 = 0;$$

Q besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = -1 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A - \lambda\, E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (1-\lambda)\,(-\lambda) - \frac{1}{4} = \lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} > 0$ und $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} < 0$; sind v_1 und v_2 Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2, so ergibt sich mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{||v_1||}, \frac{v_2}{||v_2||} \right) \qquad \text{die Beziehung} \qquad P^\top A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ in die Gleichung $\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot P^\top AP \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1$, also

$$\underbrace{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}_{>0}\, u^2 + \underbrace{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}_{<0}\, v^2 = 1;$$

damit ist Q eine Hyperbel.