MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 9
09.12.2014

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

33. a) Für die Parameter a, $b \in \mathbb{R}$ mit $0 < b \leq a$ betrachten wir die Ellipse E mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

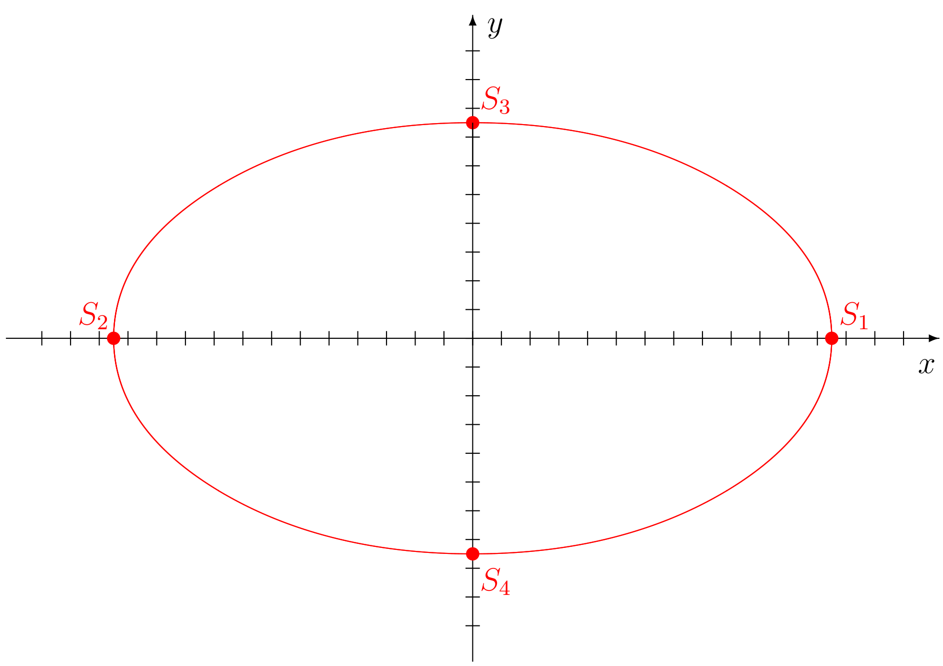
Da diese die vier Scheitelpunkte $S_{1,2} = (\pm a; 0)$ und $S_{3,4} = (0; \pm b)$ besitzt, wählen wir $a = \frac{25}{2}$; ferner gilt

$$\left(\tfrac{15}{2}; 6\right) \in E \iff \frac{\left(\frac{15}{2}\right)^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} + \frac{6^2}{b^2} = 1 \iff \frac{6^2}{b^2} = 1 - \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 \iff$$

$$\iff \frac{6^2}{b^2} = \left(\tfrac{4}{5}\right)^2 \iff b^2 = \frac{6^2}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} \iff b^2 = \left(\tfrac{15}{2}\right)^2 \underset{b>0}{\iff} b = \tfrac{15}{2}.$$

Die gesuchte Ellipse besitzt damit die Gleichung

$$\frac{x^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{15}{2}\right)^2} = 1.$$



b) Für die Parameter a, $b \in \mathbb{R}$ mit $0 < b \leq a$ betrachten wir die Hyperbel H mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Da diese die beiden Brennpunkte $F_{1,2} = (\pm e; 0)$ mit $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ sowie die beiden Asymptoten $y = \pm \frac{b}{a}\, x$ besitzt, bestimmen wir a und b mit

$$a^2 + b^2 = e^2 = 10^2 \qquad \text{und} \qquad \tfrac{b}{a} = \tfrac{3}{4};$$

wegen $b = \frac{3}{4}\, a$ ergibt sich

$$10^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\tfrac{3}{4}\, a\right)^2 = \left(1 + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2\right)\, a^2 = \left(\tfrac{5}{4}\right)^2\, a^2,$$

wegen $a > 0$ also

$$10 = \tfrac{5}{4}\, a \qquad \text{und damit} \quad a = \tfrac{10}{\frac{5}{4}} = 8,$$

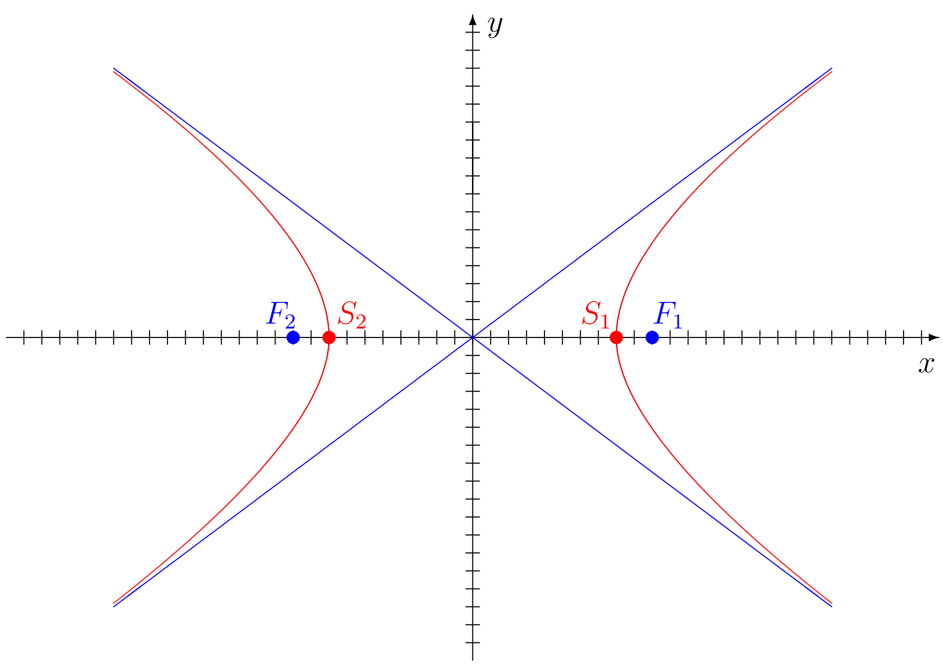
woraus sich dann

$$b = \tfrac{3}{4}\, a = \tfrac{3}{4} \cdot 8 = 6$$

ergibt. Die Probe bestätigt, daß die Hyperbel mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{8^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$$

die gewünschten Eigenschaften besitzt.



c) Die Schnittpunkte von E und H sind genau diejenigen Punkte $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, deren Koordinaten sowohl der Ellipsengleichung

$$E \quad : \quad \frac{x^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{15}{2}\right)^2} = 1$$

als auch der Hyperbelgleichung

$$H \quad : \quad \frac{x^2}{8^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$$

genügen; wir haben also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lccccccc} \text{(I)} & \frac{4}{25^2} & \cdot & x^2 & + & \frac{4}{15^2} & \cdot & y^2 & = & 1 \\ \text{(II)} & \frac{1}{8^2} & \cdot & x^2 & - & \frac{1}{6^2} & \cdot & y^2 & = & 1 \end{array}$$

in den Unbestimmten x^2 und y^2 zu lösen. Wegen

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{4}{25^2} & \frac{4}{15^2} & 1 \\ \frac{1}{8^2} & -\frac{1}{6^2} & 1 \end{array}\right) \underset{48^2\cdot(\text{II})}{\overset{75^2\cdot(\text{I})}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 36 & 100 & 5625 \\ 36 & -64 & 2304 \end{array}\right) \underset{(\text{II})-(\text{I})}{\rightsquigarrow}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 36 & 100 & 5625 \\ 0 & -164 & -3321 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{164}\cdot(\text{II})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 36 & 100 & 5625 \\ 0 & 1 & \frac{81}{4} \end{array}\right) \underset{\text{I}-100\cdot(\text{II})}{\rightsquigarrow}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 36 & 0 & 3600 \\ 0 & 1 & \frac{81}{4} \end{array}\right) \underset{\frac{1}{36}\cdot(\text{I})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & \frac{81}{4} \end{array}\right)$$

erhält man $x^2 = 100$, also $x = \pm 10$, und $y^2 = \frac{81}{4}$, also $y = \pm\frac{9}{2}$. Damit ist $S = \left(10; \frac{9}{2}\right)$ der im 1. Quadranten liegende Schnittpunkt von E und H; die Tangente an die Ellipse E im Punkt S besitzt die Gleichung

$$\frac{10 \cdot x}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} + \frac{\frac{9}{2} \cdot y}{\left(\frac{15}{2}\right)^2} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad 8\,x + 10\,y = 125,$$

und die Tangente an die Hyperbel H im Punkt S besitzt die Gleichung

$$\frac{10 \cdot x}{8^2} - \frac{\frac{9}{2} \cdot y}{6^2} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad 5\,x - 4\,y = 32.$$

34. Die gegebene Ellipse

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

besitzt die beiden Brennpunkte

$$f_1 = (-e; 0) \quad \text{und} \quad f_2 = (e; 0) \qquad \text{mit} \qquad e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Die Tangente T an E im Punkt $p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in E$ besitzt die Gleichung

$$T \quad : \quad \frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1;$$

damit ist

$$\widetilde{u} = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{a^2} \\ \frac{y_0}{b^2} \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor von T der Länge

$$||\widetilde{u}|| = \sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2},$$

so daß

$$\frac{\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} - 1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} = 0$$

die Hessesche Normalform der Tangente T ist. Für die Abstände $d(T, f_1)$ und $d(T, f_2)$ der beiden Brennpunkte $f_1 = (-e; 0)$ und $f_2 = (e; 0)$ von T gilt damit

$$d(T, f_1) = \left| \frac{\frac{x_0 \cdot (-e)}{a^2} + \frac{y_0 \cdot 0}{b^2} - 1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} \right| = \left| \frac{-\frac{x_0 \cdot e}{a^2} - 1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} \right| = \left| \frac{\frac{x_0 \cdot e}{a^2} + 1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} \right|$$

und

$$d(T, f_2) = \left| \frac{\frac{x_0 \cdot e}{a^2} + \frac{y_0 \cdot 0}{b^2} - 1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} \right| = \left| \frac{\frac{x_0 \cdot e}{a^2} - 1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} \right|.$$

Damit ergibt sich

$$d(T, f_1) \cdot d(T, f_2) = \left| \frac{\frac{x_0 \cdot e}{a^2} + 1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} \right| \cdot \left| \frac{\frac{x_0 \cdot e}{a^2} - 1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\left(\frac{x_0 \cdot e}{a^2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2} \right| = \left| \frac{\frac{x_0^2 \cdot e^2}{a^4} - 1}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \right| \underset{\cdot a^4 b^2}{=} \left| \frac{(x_0^2 \cdot e^2 - a^4) \cdot b^2}{x_0^2 \cdot b^2 + \frac{y_0^2}{b^2} \cdot a^4} \right| \underset{\frac{y_0^2}{b^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2}}{=}$$

$$= \left| \frac{a^4 - x_0^2 \cdot e^2}{x_0^2 \cdot b^2 + \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) \cdot a^4} \right| \cdot b^2 \underset{e^2 = a^2 - b^2}{=} \left| \frac{a^4 - x_0^2 \cdot (a^2 - b^2)}{x_0^2 \cdot b^2 + a^4 - x_0^2 \cdot a^2} \right| \cdot b^2 = b^2.$$

35. Die gegebene Hyperbel

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

besitzt zunächst die beiden Asymptoten

$$A_1 \quad : \quad y = \frac{b}{a} \cdot x \qquad \text{und} \qquad A_2 \quad : \quad y = -\frac{b}{a} \cdot x;$$

ferner gilt für die Tangente T an H im Punkt $p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in H$

$$T \quad : \quad \frac{x_0 \cdot x}{a^2} - \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1.$$

Für den Schnittpunkt $p_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ der Asymptote A_1 und der Tangente T gilt also

$$y_1 = \frac{b}{a} \cdot x_1 \qquad \text{und} \qquad \frac{x_0}{a^2} \cdot x_1 - \frac{y_0}{b^2} \cdot y_1 = 1,$$

also

$$\frac{x_0}{a^2} \cdot x_1 - \frac{y_0}{b^2} \cdot \left(\frac{b}{a} \cdot x_1 \right) = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{a} \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) \cdot x_1 = 1,$$

und damit

$$x_1 = \frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}} \qquad \text{und} \qquad y_1 = \frac{b}{a} \cdot x_1 = \frac{b}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}.$$

Entsprechend erhält man für den Schnittpunkt $p_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ der Asymptote A_2 und der Tangente T also

$$y_2 = -\frac{b}{a} \cdot x_2 \qquad \text{und} \qquad \frac{x_0}{a^2} \cdot x_2 - \frac{y_0}{b^2} \cdot y_2 = 1,$$

also

$$\frac{x_0}{a^2} \cdot x_2 - \frac{y_0}{b^2} \cdot \left(-\frac{b}{a} \cdot x_2 \right) = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{a} \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right) \cdot x_2 = 1,$$

und damit

$$x_2 = \frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} \qquad \text{und} \qquad y_2 = -\frac{b}{a} \cdot x_2 = -\frac{b}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}.$$

Das Dreieck mit den Ecken $m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $p_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $p_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ wird vom Eckpunkt m aus durch die beiden Vektoren

$$u_1 = p_1 - m = p_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = p_2 - m = p_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Für seinen Flächeninhalt F gilt also

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2} \cdot |\det(u_1, u_2)| = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right| &= \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}} & \frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} \\ \frac{b}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}} & -\frac{b}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} \end{pmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}} \cdot \frac{1}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} \cdot \det \begin{pmatrix} a & a \\ b & -b \end{pmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}} \cdot (a \cdot (-b) - a \cdot b) \right| = \frac{ab}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}; \end{aligned}$$

da nun der Punkt $p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ auf der Hyperbel H liegt, genügen seine Koeffizienten der Hyperbelgleichung von H, so daß sich wegen

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

die gewünschte Beziehung $F = ab$ ergibt.

36. a) Wir zeigen, daß die Ellipse

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

mit den beiden Brennpunkten $F_{1/2} = (\pm e, 0)$ mit $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ durch die Brennpunkteigenschaft

$$(\diamond) \qquad d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2\,a$$

charakterisiert ist. Für $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \quad \text{sowie} \quad d(P, F_2) = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$

gilt dann

$$\begin{aligned}
(\diamond) \quad &\Longleftrightarrow \quad d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2\,a \\
&\Longleftrightarrow \quad d(P, F_2) = 2\,a - d(P, F_1) \\
&\Longleftrightarrow \quad \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2\,a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \\
&\overset{(**)}{\Longleftrightarrow} \quad (x+e)^2 + y^2 = 4\,a^2 - 4\,a\,\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2 + 2\,e\,x + e^2 = 4\,a^2 - 4\,a\,\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + x^2 - 2\,e\,x + e^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad 4\,e\,x = 4\,a^2 - 4\,a\,\sqrt{(x-e)^2 + y^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad e\,x = a^2 - a\,\sqrt{(x-e)^2 + y^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad a\,\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = a^2 - e\,x \\
&\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \quad a^2\left((x-e)^2 + y^2\right) = a^4 - 2\,a^2\,e\,x + e^2\,x^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad a^2(x-e)^2 + a^2\,y^2 = a^4 - 2\,a^2 e\,x + e^2\,x^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad a^2\,(x^2 - 2\,e\,x + e^2) + a^2\,y^2 = a^4 - 2\,a^2\,e\,x + e^2\,x^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad a^2\,x^2 - 2\,a^2\,e\,x + a^2\,e^2 + a^2\,y^2 = a^4 - 2\,a^2\,e\,x + e^2\,x^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad a^2\,x^2 - e^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^4 - a^2\,e^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \underbrace{(a^2 - e^2)}_{=b^2}\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,\underbrace{(a^2 - e^2)}_{=b^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad b^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,b^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.
\end{aligned}$$

In der Implikationsrichtung „$\Longrightarrow$“ wurde bei „$\overset{(**)}{\Longrightarrow}$“ und „$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$“ jeweils die Gleichung quadriert, so daß in der Implikationsrichtung „$\Longleftarrow$“ an diesen Stellen gesonderte Überlegungen notwendig sind:

- Bei „$\overset{(*)}{\Longleftarrow}$“ geht folgenden Überlegung ein: für alle Punkte $(x, y) \in E$ gilt
$$|x| \leq a \quad \text{und ferner} \quad \text{gilt} \quad e \leq a.$$
Damit ergibt sich
$$|e\,x| = e \cdot |x| \leq a \cdot a = a^2$$
und damit
$$a^2 - \underbrace{ex}_{\leq a^2} \geq 0.$$

- Bei „$\overset{(**)}{\Longleftarrow}$“ geht folgenden Überlegung ein: für alle Punkte $(x, y) \in E$ gilt
$$|x| \leq a \quad \text{und} \quad |y| \leq b.$$
Damit ergibt sich
$$\begin{aligned}(x-e)^2 + y^2 = \underbrace{x^2}_{\leq a^2} - 2\,e\,x + \underbrace{e^2}_{=a^2-b^2} + \underbrace{y^2}_{\leq b^2} \leq \\ \leq a^2 \underbrace{-2\,e\,x}_{\leq 2a^2} + a^2 - b^2 + b^2 \leq a^2 + 2\,a^2 + a^2 = 4\,a^2,\end{aligned}$$
zusammen mit der Monotonie der Quadratwurzel also
$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} \leq \sqrt{4\,a^2} = 2\,a.$$

b) Wir zeigen, daß die Hyperbel
$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$
mit den beiden Brennpunkten $F_{1/2} = (\pm e, 0)$ mit $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ durch die Brennpunkteigenschaft
$$(\diamond) \qquad |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2\,a$$
charakterisiert ist.

Dabei betrachten wir zunächst nur die Punkte $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ der rechten Halbebene $x > 0$ und damit die Beziehung
$$(\diamond') \qquad d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2\,a;$$
mit
$$d(P, F_1) = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \quad \text{sowie} \quad d(P, F_2) = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$

$$
\begin{aligned}
(\diamond') \quad &\iff d(P,F_2) - d(P,F_1) = 2\,a\\
&\iff d(P,F_2) = 2\,a + d(P,F_1)\\
&\iff \sqrt{(x+e)^2+y^2} = 2\,a + \underbrace{\sqrt{(x-e)^2+y^2}}_{\geq 0 > -2a}\\
&\iff (x+e)^2+y^2 = 4\,a^2 + 4\,a\,\sqrt{(x-e)^2+y^2} + (x-e)^2 + y^2\\
&\iff x^2 + 2\,e\,x + e^2 = 4\,a^2 + 4\,a\,\sqrt{(x-e)^2+y^2} + x^2 - 2\,e\,x + e^2\\
&\iff 4\,e\,x = 4\,a^2 + 4\,a\,\sqrt{(x-e)^2+y^2}\\
&\iff e\,x = a^2 + a\,\sqrt{(x-e)^2+y^2}\\
&\iff a\sqrt{(x-e)^2+y^2} = -a^2 + ex\\
&\overset{(*)}{\iff} a^2\left((x-e)^2+y^2\right) = a^4 - 2\,a^2\,e\,x + e^2x^2\\
&\iff a^2(x-e)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2\,a^2\,e\,x + e^2x^2\\
&\iff a^2(x^2 - 2\,e\,x + e^2) + a^2\,y^2 = a^4 - 2\,a^2\,e\,x + e^2\,x^2\\
&\iff a^2\,x^2 - 2\,a^2\,e\,x + a^2\,e^2 + a^2\,y^2 = a^4 - 2\,a^2\,e\,x + e^2\,x^2\\
&\iff a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2e^2\\
&\iff \underbrace{(a^2-e^2)}_{=-b^2}\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,\underbrace{(a^2-e^2)}_{=-b^2}\\
&\iff -b^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,(-b^2)\\
&\iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.
\end{aligned}
$$

Da bei „$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$“ die Gleichung quadriert wird, ist bei „$\overset{(*)}{\Longleftarrow}$“ die folgende Überlegung nötig: für alle Punkte $(x,y) \in H$ mit $x > 0$ gilt $x \geq a$, so daß sich mit $e \geq a$ also

$$e \cdot x \geq a \cdot a = a^2 \qquad \text{und damit} \qquad -a^2 + e\,x \geq 0$$

ergibt.

Für die Punkte $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ der linken Halbebene $x < 0$ gelangt man aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Hyperbel mit den gleichen Überlegungen zum gewünschten Ergebnis $d(P,F_1) - d(P,F_2) = 2a$.