

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

29. a) Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(D_0) \quad y''' - 3y'' + y' - 3y = 0$$

dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3 = (\lambda - 3) \cdot \lambda^2 + (\lambda - 3) \\ &= (\lambda - 3)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 3)(\lambda - i)(\lambda + i) \end{aligned}$$

mit der einfachen reellen Nullstelle $\lambda_1 = 3$ sowie den beiden einfachen konjugiert-komplexen Nullstellen $\lambda_{2,3} = \pm i$ mit dem Realteil $\varrho = 0$ und dem Imaginärteil $\pm\sigma$ mit $\sigma = 1$; damit bilden die drei Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \varphi_1(x) &= e^{\lambda_1 x} = e^{3x}, \\ \varphi_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \varphi_2(x) &= e^{\varrho x} \cos(\sigma x) = \cos x, \\ \varphi_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \varphi_3(x) &= e^{\varrho x} \sin(\sigma x) = \sin x, \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem von (D_0) , und die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 e^{3x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x,$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D_0) . Dabei sind beispielsweise φ_2 und φ_3 periodische Lösungen von (D_0) , während etwa die Lösung φ_1 nicht periodisch ist.

b) Die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$(D) \quad y''' - 3y'' + y' - 3y = 17e^{4x}$$

dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(x) = 17e^{4x},$$

von der Form $b(x) = p(x)e^{ax}$ mit der konstanten Funktion $p(x) = 17$ sowie $a = 4$. Da nun a keine Nullstelle von χ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung φ_p von (D) den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)e^{4x} = r e^{4x}$$

mit der ebenfalls konstanten Funktion $q(x) = r$. Wegen

$$\varphi'_p(x) = 4r e^{4x}, \quad \varphi''_p(x) = 16r e^{4x} \quad \text{und} \quad \varphi'''_p(x) = 64r e^{4x}$$

ist φ_p genau dann Lösung von (D), wenn

$$(64r e^{4x}) - 3(16r e^{4x}) + (4r e^{4x}) - 3(r e^{4x}) = 17e^{4x},$$

also

$$17r e^{4x} = 17e^{4x},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $17r = 17$ und damit $r = 1$. Damit ist

$$\varphi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = e^{4x},$$

eine spezielle Lösung sowie die Gesamtheit der Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi &= c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3 + \varphi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi(x) &= c_1 e^{3x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + e^{4x}, \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D). Wegen

$$\varphi'(x) = 3c_1 e^{3x} - c_2 \sin x + c_3 \cos x + 4e^{4x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 &\iff c_1 e^0 + c_2 \cos 0 + c_3 \sin 0 + e^0 = 0 \iff \\ &\iff c_1 + c_2 + 1 = 0 \iff c_2 = -(c_1 + 1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi'(0) = 0 &\iff 3c_1 e^0 - c_2 \sin 0 + c_3 \cos 0 + 4e^0 = 0 \iff \\ &\iff 3c_1 + c_3 + 4 = 0 \iff c_3 = -(3c_1 + 4) \end{aligned}$$

stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 e^{3x} - (c_1 + 1) \cos x - (3c_1 + 4) \sin x + e^{4x},$$

mit $c_1 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung des gestellten Anfangswertproblems dar.

30. Gegeben ist die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$(D) \quad y'' - 5y' + 6y = 12x^2 - 26x + 15$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; wir betrachten zudem die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung

$$(D_0) \quad y'' - 5y' + 6y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

a) Es besitzt (D_0) das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

mit den beiden einfachen reellen Nullstellen $\lambda_1 = 2$ sowie $\lambda_2 = 3$; damit bilden die beiden Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2x} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{3x}$$

ein Fundamentalsystem von (D_0) . Ferner besitzt (D) die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(x) = 12x^2 - 26x + 15,$$

der Form $b(x) = p(x)e^{ax}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 12x^2 - 26x + 15$ vom Grade $m = 2$ und $a = 0$. Da a keine Nullstelle von χ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung φ_p von (D) den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x) = rx^2 + sx + t$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = rx^2 + sx + t$ vom Grade $m = 2$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = 2rx + s \quad \text{und} \quad \varphi_p''(x) = 2r$$

ist φ_p genau dann Lösung von (D) , wenn

$$2r - 5(2rx + s) + 6(rx^2 + sx + t) = 12x^2 - 26x + 15,$$

also

$$6rx^2 + (-10r + 6s)x + (2r - 5s + 6t) = 12x^2 - 26x + 15,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$6r = 12, \quad -10r + 6s = -26 \quad \text{und} \quad 2r - 5s + 6t = 15,$$

also $r = 2$, $s = -1$ und $t = 1$, und folglich

$$\varphi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = 2x^2 - x + 1.$$

Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + 2x^2 - x + 1,$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D) .

b) Für die in a) ermittelte Lösungsfunktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + 2x^2 - x + 1$$

gilt

$$\varphi'(x) = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x} + 4x - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, und wir bestimmen die noch freien Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so daß φ die gestellten Anfangsbedingungen erfüllt. Wegen

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1 e^0 + c_2 e^0 + 2 \cdot 0^2 - 0 + 1 = 0 \iff c_1 + c_2 = -1$$

und

$$\varphi'(0) = 0 \iff 2c_1 e^0 + 3c_2 e^0 + 4 \cdot 0 - 1 = 0 \iff 2c_1 + 3c_2 = 1$$

ergibt sich $c_1 = -4$ und $c_2 = 3$, und wir erhalten die Lösungsfunktion

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -4e^{2x} + 3e^{3x} + 2x^2 - x + 1.$$

31. Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(D_0) \quad y'' + y' - 6y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

mit den beiden einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 2$ sowie $\lambda_2 = -3$; damit bilden die beiden Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2x} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-3x}$$

ein Fundamentalsystem von (D_0) . Die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(x) = \cos x,$$

ist von der Form $b(x) = p(x) e^{ax} \cos(kx)$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 1$ vom Grade $m = 0$ sowie $a = 0$ und $k = 1$. Da $a + ki = i$ keine Nullstelle von χ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung φ_p von

$$(D) \quad y'' + y' - 6y = \cos x$$

den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q_1(x) \cos x + q_2(x) \sin x$$

mit Polynomfunktionen $q_1(x) = r$ und $q_2(x) = s$ vom Grade $m = 0$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = -r \sin x + s \cos x \quad \text{und} \quad \varphi_p''(x) = -r \cos x - s \sin x$$

ist φ_p genau dann Lösung von (D) , wenn

$$(-r \cos x - s \sin x) + (-r \sin x + s \cos x) - 6(r \cos x + s \sin x) = \cos x,$$

also

$$(-7r + s) \cos x + (-r - 7s) \sin x = \cos x,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $-7r + s = 1$ und $-r - 7s = 0$, also $r = -\frac{7}{50}$ und $s = \frac{1}{50}$, und folglich $\varphi_p(x) = -\frac{7}{50} \cos x + \frac{1}{50} \sin x$. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - \frac{7}{50} \cos x + \frac{1}{50} \sin x,$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D).

Die partikuläre Lösung φ_p ist (als Linearkombination von Sinus und Cosinus) beschränkt. Damit ist die Lösung φ wegen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_1(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_2(x) = 0$$

genau dann auf \mathbb{R}^+ beschränkt, wenn $c_1 = 0$ gilt, und wegen

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_1(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_2(x) = \infty$$

genau dann auf \mathbb{R}^- beschränkt, wenn $c_2 = 0$ gilt. Insgesamt ist φ genau dann eine in \mathbb{R} beschränkte Funktion, wenn $c_1 = c_2 = 0$ gilt, also für $\varphi = \varphi_p$.

32. In Abhängigkeit von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist das lineare Anfangswertproblem

$$y'' - 2a y' + a^2 y = 2e^{ax} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y'(0) = 0$$

zu betrachten, und dabei diejenigen $a \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für die die Lösung die zusätzliche Bedingung $y(1) = 1$ erfüllt.

Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(D_0) \quad y'' - 2ay' + a^2 y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = (\lambda - a)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda = a$; damit bilden die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{ax}, \quad \text{und} \quad \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = x e^{ax},$$

ein Fundamentalsystem von (D_0) . Die gegebene inhomogene lineare Differentialgleichung

$$(D) \quad y'' - 2a y' + a^2 y = 2e^{ax}$$

besitzt die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(x) = 2e^{ax},$$

der Form $b(x) = p(x) e^{ax}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 2$ vom Grade $m = 0$ und der Nullstelle a von χ der Ordnung $\alpha = 2$. Für die partikuläre Lösung φ_p von (D) wählen wir den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x) e^{ax} = (rx^2 + sx + t) e^{ax}$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = rx^2 + sx + t$ vom Grade $m + \alpha = 2$; nachdem e^{ax} und $x e^{ax}$ die homogene Gleichung (D_0) lösen, können wir $s = t = 0$ wählen. Wegen

$$\varphi_p'(x) = 2r x \cdot e^{ax} + r x^2 \cdot a e^{ax} = (2r x + r a x^2) e^{ax}$$

und

$$\varphi_p''(x) = (2r + 2rax) \cdot e^{ax} + (2rx + rax^2) \cdot a e^{ax} = (2r + 4rax + ra^2 x^2) e^{ax}$$

ist φ_p genau dann Lösung von (D), wenn

$$(2r + 4rax + ra^2 x^2) e^{ax} - 2a (2rx + rax^2) e^{ax} + a^2 (rx^2 e^{ax}) = 2e^{ax},$$

also

$$2rae^{ax} = 2e^{ax},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $r = 1$ und folglich $\varphi_p(x) = x^2 e^{ax}$. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (c_1 + c_2 x + x^2) e^{ax},$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D); dabei ist

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= (c_2 + 2x) \cdot e^{ax} + (c_1 + c_2 x + x^2) \cdot a e^{ax} = \\ &= ((c_2 + ac_1) + (2 + ac_2) x + ax^2) e^{ax} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Unter Berücksichtigung der gegebenen Anfangswerte ergibt sich

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1 \cdot e^0 = 0 \iff c_1 = 0$$

und damit

$$\varphi'(0) = 0 \iff c_2 + a c_1 \cdot e^0 = 0 \underset{c_1=0}{\iff} c_2 = 0,$$

insgesamt also

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x^2 e^{ax}.$$

Diese Lösung des gestellten Anfangswertproblems erfüllt nun wegen

$$\varphi(1) = 1 \iff 1^2 \cdot e^a = 1 \iff e^a = 1 \iff a = 0$$

genau dann die zusätzliche Bedingung $y(1) = 1$, wenn $a = 0$ gilt; in diesem Fall ergibt sich als Lösungsfunktion

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x^2.$$