MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 7
25.11.2014

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

25. a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sinh' x = \cosh x, &\qquad \sinh'' x = \cosh' x = \sinh x \\ \sinh''' x = \sinh' x = \cosh x, &\qquad \sinh'''' x = \cosh' x = \sinh x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cosh' x = \sinh x, &\qquad \cosh'' x = \sin' x = \cosh x \\ \cosh''' x = \cosh' x = \sinh x, &\qquad \cosh'''' x = \sinh' x = \cosh x \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \sin' x = \cos x, &\qquad \sin'' x = \cos' x = -\sin x \\ \sin''' x = -\sin' x = -\cos x, &\qquad \sin'''' x = -\cos' x = \sin x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cos' x = -\sin x, &\qquad \cos'' x = -\sin' x = -\cos x \\ \cos''' x = -\cos' x = \sin x, &\qquad \cos'''' x = \sin' x = \cos x, \end{aligned}$$

weswegen die Funktionen sinh und cosh sowie sin und cos Lösungen der Differentialgleichung $y'''' - y = 0$ sind.

b) Mit den Funktionen sinh und cosh sowie sin und cos sind auch alle Linearkombinationen davon Lösungen der gegebenen linearen Differentialgleichung $y'''' - y = 0$ vierter Ordnung; mit Koeffizienten c_1, c_2, c_3, $c_4 \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= c_1 \cdot \sinh x + c_2 \cdot \cosh x + c_3 \cdot \sin x + c_4 \cdot \cos x, \\ \varphi'(x) &= c_1 \cdot \cosh x + c_2 \cdot \sinh x + c_3 \cdot \cos x - c_4 \cdot \sin x, \\ \varphi''(x) &= c_1 \cdot \sinh x + c_2 \cdot \cosh x - c_3 \cdot \sin x - c_4 \cdot \cos x, \\ \varphi'''(x) &= c_1 \cdot \cosh x + c_2 \cdot \sinh x - c_3 \cdot \cos x + c_4 \cdot \sin x, \end{aligned}$$

woraus sich wegen $\sinh 0 = 0$ und $\cosh 0 = 1$ sowie $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 &\iff c_2 + c_4 = 0 \\ \varphi'(0) = 2 &\iff c_1 + c_3 = 2 \\ \varphi''(0) = 2 &\iff c_2 - c_4 = 2 \\ \varphi'''(0) = -2 &\iff c_1 - c_3 = -2 \end{aligned}$$

und damit $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$ und $c_4 = -1$, also die Lösungsfunktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \cosh x + 2 \sin x - \cos x,$$

ergibt.

26. Es handelt sich um die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + 2\,a\,y' + a^2\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\,a\,\lambda + a^2 = (\lambda + a)^2$$

besitzt die doppelte reelle Nullstelle $\lambda = -a$, so daß die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{\lambda\,x} = e^{-a\,x},$$

und

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = x\,e^{\lambda\,x} = x\,e^{-a\,x},$$

ein Fundamentalsystem bilden; damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\,e^{-a\,x} + c_2\,x\,e^{-a\,x} = (c_1 + c_2\,x)\,e^{-a\,x}$$

mit den Konstanten c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2\,a\,y' + a^2\,y = 0$. Die noch freien Konstanten c_1 und c_2 bestimmen wir mit Hilfe der Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$: wegen

$$\varphi(0) = 0 \iff (c_1 + c_2 \cdot 0)\,e^{-a \cdot 0} = 0 \iff c_1 = 0$$

ist zunächst

$$\varphi(x) = c_2\,x\,e^{-a\,x}$$

und damit

$$\varphi'(x) = c_2\,e^{-a\,x} + c_2\,x\,e^{-a\,x}(-a) = c_2\,(1 - a\,x)\,e^{-a\,x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, und wegen

$$\varphi'(0) = 1 \iff c_2\,(1 - a \cdot 0)\,e^{-a \cdot 0} = 1 \iff c_2 = 1$$

ergibt sich schließlich

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x\,e^{-a\,x}.$$

Dabei wird die Bedingung $y(1) = b$ wegen

$$\varphi(1) = b \iff 1 \cdot e^{-a \cdot 1} = b \iff e^{-a} = b \iff a = -\ln b$$

genau für den Parameter $a = -\ln b$ erfüllt, und man erhält die Lösung

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x\,e^{\ln b \cdot x} = x\,\left(e^{\ln b}\right)^x = x\,b^x.$$

Hinsichtlich des Verhaltens von φ für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ treffen wir daher die folgende Fallunterscheidung:

- Für $0 < b < 1$ ist

$$\lim_{x \to -\infty} b^x = +\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to +\infty} b^x = 0$$

und damit

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} \big(\underbrace{x}_{\to -\infty} \underbrace{b^x}_{\to +\infty} \big) = -\infty$$

sowie mit Hilfe der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{b^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-b^{-x} \ln b} = \lim_{x \to +\infty} \big(-\frac{b^x}{\ln b} \big) = 0.$$

- Für $b = 1$ ist $b^x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

- Für $1 < b$ ist

$$\lim_{x \to -\infty} b^x = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to +\infty} b^x = +\infty$$

und damit mit Hilfe der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{b^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-b^{-x} \ln b} = \lim_{x \to -\infty} \big(-\frac{b^x}{\ln b} \big) = 0.$$

sowie

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \big(\underbrace{x}_{\to +\infty} \underbrace{b^x}_{\to +\infty} \big) = +\infty.$$

27. Es handelt sich um die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + 2\,y' + a\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda + a$$

besitzt gemäß der Lösungsformel für quadratische Gleichungen die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-2 \pm \sqrt{4 - 4\,a} \right) = -1 \pm \sqrt{1 - a},$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $a < 1$ besitzt $\chi(\lambda)$ die beiden einfachen reellen Nullstellen

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{1 - a} \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = -1 - \sqrt{1 - a},$$

so daß die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x},$$

und

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x},$$

ein Fundamentalsystem bilden; dabei gilt

$$\lim_{x\to\infty} \varphi_1(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\lambda_1 x} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } \lambda_1 > 0, \\ 1, & \text{falls } \lambda_1 = 0, \\ 0, & \text{falls } \lambda_1 < 0 \end{cases}$$

und

$$\lim_{x\to\infty} \varphi_2(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\lambda_2 x} \underset{\lambda_2<0}{=} 0.$$

Damit genügen die beiden Fundamentallösungen (und folglich alle Lösungsfunktionen)

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\, e^{\lambda_1 x} + c_2\, e^{\lambda_2 x},$$

der Differentialgleichung $y'' + 2\,y' + a\,y = 0$ genau dann der Bedingung $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$, falls $\lambda_1 < 0$ ist; wegen

$$\lambda_1 < 0 \iff -1 + \sqrt{1-a} < 0 \iff$$
$$\iff \sqrt{1-a} < 1 \iff 1 - a < 1 \iff 0 < a$$

ist dies genau für $a \in \,]0;1[$ der Fall.

- Für $a = 1$ besitzt $\chi(\lambda)$ die doppelte reelle Nullstelle $\lambda = -1$, so daß die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{\lambda x} = e^{-x},$$

und

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = x\, e^{\lambda x} = x\, e^{-x},$$

ein Fundamentalsystem bilden; damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x} = (c_1 + c_2\, x)\, e^{-x}$$

mit den Konstanten c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2\,y' + a\,y = 0$, und etwa unter Verwendung der Regel von de l'Hospital erhält man

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{c_1 + c_2\, x}{e^x} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{c_2}{e^x} = 0.$$

- Für $1 < a$ besitzt $\chi(\lambda)$ die beiden konjugiert–komplexen Nullstellen

$$\lambda_1 = -1 + i\sqrt{a-1} \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = -1 - i\sqrt{a-1},$$

mit dem Realteil $\varrho = -1$ und dem Imaginärteil $\pm\sigma$ mit $\sigma = \sqrt{a-1}$, so daß die beiden (reellwertigen) Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{\varrho x} \cos(\sigma\, x) = e^{-x} \cos\left(\sqrt{a-1}\; x\right),$$

und

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = e^{\varrho x} \sin(\sigma x) = e^{-x} \sin\left(\sqrt{a-1}\, x\right),$$

ein Fundamentalsystem bilden; damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\begin{aligned} &\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ &\qquad \varphi(x) = c_1\, e^{-x} \cos\left(\sqrt{a-1}\, x\right) + c_2\, e^{-x} \sin\left(\sqrt{a-1}\, x\right), \end{aligned}$$

mit den Konstanten $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2\,y' + a\,y = 0$, und aufgrund der Beschränktheit von Cosinus und Sinus erhält man

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(c_1 \cos\left(\sqrt{a-1}\, x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{a-1}\, x\right)\right)}_{\text{beschränkt}} \right) = 0.$$

Damit genügen genau dann alle Lösungen φ der gegebenen Differentialgleichung $y'' + 2\,y' + a\,y = 0$ der Bedingung $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$, wenn $a \in \,]0; \infty[$ gilt, also a eine positive reelle Zahl ist.

28. a) Mit der Funktion $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist dann auch die Funktion $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = x^2\, \varphi(x)$, zweimal differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x^2\, \varphi(x) \\ \psi'(x) &= 2\,x\,\varphi(x) + x^2\, \varphi'(x) \\ \psi''(x) &= 2\,\varphi(x) + 4\,x\,\varphi'(x) + x^2\, \varphi''(x) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} &\psi''(x) - 3\,\psi'(x) - 4\,\psi(x) = \\ &\quad = 2\,\varphi(x) + 4\,x\,\varphi'(x) + x^2\,\varphi''(x) - 3\left(2\,x\,\varphi(x) + x^2\,\varphi'(x)\right) - 4\,x^2\,\varphi(x) = \\ &\quad = x^2\,\varphi''(x) + \left(4\,x - 3\,x^2\right)\varphi'(x) + \left(2 - 6\,x - 4\,x^2\right)\varphi(x) = \\ &\quad = x^2 \cdot \left[\varphi''(x) + \left(\frac{4}{x} - 3\right)\varphi'(x) + \left(\frac{2}{x^2} - \frac{6}{x} - 4\right)\varphi(x)\right]; \end{aligned}$$

damit ist $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ genau dann eine Lösung von

$$(*) \qquad y'' + \left(\frac{4}{x} - 3\right) y' + \left(\frac{2}{x^2} - \frac{6}{x} - 4\right) y = 0,$$

wenn $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$(**) \qquad z'' - 3\,z' - 4\,z = 0$$

ist.

b) Bei $(**)$ handelt es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; der Exponentialansatz $z = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ liefert das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3\,\lambda - 4 = (\lambda + 1)\,(\lambda - 4)$$

mit den beiden einfachen reellen Nullstellen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$, und die beiden Funktionen $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit

$$\psi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{-x}, \qquad \text{und} \qquad \psi_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{4x}$$

bilden ein Fundamentalsystem von $(**)$. Folglich stellt die Gesamtheit aller Linearkombinationen

$$\psi = c_1 \cdot \psi_1 + c_2 \cdot \psi_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \psi(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{4x},$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $(**)$ dar.

c) Gemäß a) ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{\psi(x)}{x^2} = \frac{c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{4x}}{x^2},$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $(*)$; dabei ist

$$\varphi'(x) = \frac{(-c_1\, e^{-x} + 4\, c_2\, e^{4x}) \cdot x^2 - (c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{4x}) \cdot 2\, x}{x^4}$$

für alle $x > 0$. Wegen

$$\begin{aligned} \varphi(1) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad c_1\, e^{-1} + c_2\, e^4 = 1 \\ \varphi'(1) = -3 \quad &\Longleftrightarrow \quad -3\, c_1\, e^{-1} + 2\, c_2\, e^4 = -3 \end{aligned}$$

ergibt sich $c_2 = 0$ und $c_1 = e$, so daß die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{e \cdot e^{-x}}{x^2} = \frac{e^{1-x}}{x^2},$$

die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems $(*)$ mit $\varphi(1) = 1$ und $\varphi'(1) = -3$ ist.