MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 6
18.11.2014

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt" — Lösungsvorschlag —

21. Es ist das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y) \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 1$$

für die Funktion

$$f : \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -1\right\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{\sin x}{y+1},$$

gegeben; zu betrachten ist damit

$$y' = \frac{\sin x}{y+1} \qquad \text{für} \qquad y > -1 \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 1.$$

Es handelt sich um eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen; dabei ist

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \sin x, \quad \text{und} \quad g :]-1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad g(y) = \frac{1}{y+1}.$$

Wegen $g(y) \neq 0$ für alle $y > -1$ erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int (y+1)\,dy = \int \sin x\,dx$$

und damit

$$\frac{1}{2}(y+1)^2 = -\cos x + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wegen

$$y(0) = 1 \iff \frac{1}{2}(1+1)^2 = -\cos 0 + c \iff 2 = -1 + c \iff c = 3$$

erhält man

$$\frac{1}{2}(y+1)^2 = -\cos x + 3 \qquad \text{bzw.} \quad (y+1)^2 = 6 - 2\cos x,$$

woraus sich wegen $y > -1$ bzw. $y + 1 > 0$ dann

$$y + 1 = \sqrt{6 - 2\cos x} \qquad \text{bzw.} \quad y = -1 + \sqrt{6 - 2\cos x}$$

ergibt. Wegen $6 - 2\cos x \geq 4 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = -1 + \sqrt{6 - 2\cos x},$$

die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

22. Es handelt sich um die Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen für die stetigen Funktionen

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = y - 1;$$

dabei liefert die Nullstelle $y_0 = 1$ die konstante Lösung

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi(x) = 1,$$

deren Graph G_ψ die Parallele $y = 1$ zur x–Achse ist. Da g sogar stetig differenzierbar ist, kann wegen des Existenz– und Eindeutigkeitssatzes jede weitere Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ der gegebenen Differentialgleichung keinen gemeinsamen Punkt mit ψ haben, ihr Graph G_φ verläuft also entweder komplett unterhalb oder komplett der Geraden $y = 1$:

- Für die Lösungen $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$, deren Graph komplett unterhalb der Geraden $y = 1$ verläuft, gilt $\varphi(x) < 1$ und damit unter Verwendung der gegebenen Differentialgleichung

$$\varphi'(x) = \frac{\overbrace{\varphi(x) - 1}^{<0}}{\underbrace{x^2 + 1}_{>0}} < 0$$

  für alle $x \in D_\varphi$; folglich sind diese Lösungen aber streng monoton fallend.

- Für die Lösungen $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$, deren Graph komplett oberhalb der Geraden $y = 1$ verläuft, gilt $\varphi(x) > 1$ und damit unter Verwendung der gegebenen Differentialgleichung

$$\varphi'(x) = \frac{\overbrace{\varphi(x) - 1}^{>0}}{\underbrace{x^2 + 1}_{>0}} > 0$$

  für alle $x \in D_\varphi$; folglich sind diese Lösungen streng monoton wachsend, und wir erhalten hierfür

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x^2+1},$$

  wegen $y > 1$ bzw. $y - 1 > 0$ also

$$\ln(y-1) = \arctan x + c \qquad \text{bzw.} \qquad y = e^{\arctan x + c} + 1$$

  für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Es ergeben sich also die streng monoton wachsenden Lösungsfunktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = e^{\arctan x + c} + 1,$$

  für reelle Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

23. Die zu betrachtende Differentialgleichung

$$y'\,y\left(x^2+1\right)+x\left(y^2+1\right)=0$$

läßt sich in

$$y'\,y\left(x^2+1\right)=-x\left(y^2+1\right) \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{2\,y}{y^2+1}\cdot y'=-\frac{2\,x}{x^2+1}$$

umformen; damit sind die beiden Variablen x und y bereits getrennt, so daß man durch Integration auf beiden Seiten

$$\int \frac{2\,y}{y^2+1}\,dy=\int\left(-\frac{2\,x}{x^2+1}\right)dx, \quad \text{also} \quad \ln\left(y^2+1\right)=-\ln\left(x^2+1\right)+c$$

für eine Konstante $c\in\mathbb{R}$ erhält. Wegen

$$y(0)=1 \iff \ln\left(1^2+1\right)=-\ln\left(0^2+1\right)+c \iff \ln 2=c$$

ergibt sich weiter

$$\ln\left(y^2+1\right)=-\ln\left(x^2+1\right)+\ln 2=\ln\frac{2}{x^2+1},$$

woraus sich

$$y^2+1=\frac{2}{x^2+1} \qquad \text{bzw.} \qquad y^2=\frac{2}{x^2+1}-1=\frac{2-\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

und damit wegen $y(0)=1$ dann

$$y=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

ergibt. Folglich ist

$$\varphi: D_\varphi\to\mathbb{R}, \quad \varphi(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}},$$

die Lösung des gestellten Anfangswertproblems; da die Wurzelfunktion zwar auf $\mathbb{R}_0^+$ definiert und stetig, aber nur auf $\mathbb{R}^+$ differenzierbar ist, beinhaltet das maximale Definitionsintervall D_φ genau diejenigen $x\in\mathbb{R}$ mit

$$\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}>0 \iff 1-x^2>0 \iff x^2<1 \iff -1<x<1;$$

es ist also $D_\varphi=\,]-1,1[$.

24. Es handelt sich um die Differentialgleichung $y'=h(x)\cdot g(y)$ mit getrennten Variablen für die stetigen Funktionen

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad h(x)=2\,x, \quad \text{und} \quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad g(y)=y\,(y-1);$$

dabei liefern die beiden Nullstellen $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$ von g die beiden konstanten Lösungen

$$\psi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi_1(x) = 0, \quad \text{und} \quad \psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi_2(x) = 1,$$

welche jeweils auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Da g sogar stetig differenzierbar ist, kann wegen des Existenz– und Eindeutigkeitssatzes jede weitere Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ der gegebenen Differentialgleichung keinen gemeinsamen Punkt mit ψ_1 oder ψ_2 haben, ihr Graph G_φ verläuft also entweder komplett unterhalb von G_{ψ_1} oder komplett zwischen G_{ψ_1} und G_{ψ_2} oder komplett oberhalb von G_{ψ_2}. Hierfür erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int \frac{1}{y(y-1)}\,dy = \int 2\,x\,dx,$$

wegen

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{y-(y-1)}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$$

also

$$\ln|y-1| - \ln|y| = x^2 + c$$

und damit

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = x^2 + c \qquad \text{bzw.} \qquad \left|1 - \frac{1}{y}\right| = e^{x^2+c} = e^{x^2}\,e^c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wir treffen die folgende Fallunterscheidung:

- Verläuft G_φ komplett zwischen G_{ψ_1} und G_{ψ_2}, so gilt $0 < y < 1$ und damit $\frac{1}{y} > 1$; damit erhält man

  $$\frac{1}{y} - 1 = e^{x^2}\,e^c \qquad \text{bzw.} \qquad y = \frac{1}{1 + e^{x^2}e^c},$$

  und die Lösung

  $$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1 + e^{x^2}e^c},$$

  ist wegen $e^c > 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
- Verläuft G_φ komplett unterhalb von G_{ψ_1} oder komplett oberhalb von G_{ψ_2}, so gilt $y < 0$ oder $y > 1$ und damit $\frac{1}{y} < 1$; damit erhält man

  $$1 - \frac{1}{y} = e^{x^2}\,e^c \qquad \text{bzw.} \qquad y = \frac{1}{1 - e^{x^2}e^c},$$

  und die Lösung

  $$\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1 - e^{x^2}e^c},$$

  ist genau dann auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, wenn der Nenner $1 - e^{x^2}e^c$ ihres Funktionsterms ohne Nullstelle ist; wegen

  $$1 - e^{x^2}e^c = 0 \iff e^{x^2}e^c = 1 \iff e^{x^2} = e^{-c} \iff x^2 = -c$$

  für alle $x \in \mathbb{R}$ ist dies genau dann der Fall, wenn $c > 0$ ist.