MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 5
11.11.2014

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt" — Lösungsvorschlag —

17. Für alle $x \in \,]0, \infty[$ gilt

$$x\,y' + 3\,y - 5\,x^2 = 0 \iff x\,y' = -3\,y + 5\,x^2 \iff y' = -\frac{3}{x} \cdot y + 5\,x;$$

folglich ist die inhomogene lineare Differentialgleichung $y' = a(x)\,y + b(x)$ erster Ordnung mit

$$a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad a(x) = -\frac{3}{x}, \qquad \text{und} \qquad b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad b(x) = 5\,x,$$

zu betrachten. Da

$$A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad A(x) = -3\,\ln x,$$

eine Stammfunktion von a ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\,e^{A(x)} = c\,e^{-3\,\ln x} = c\left(e^{\ln x}\right)^{-3} = c\,x^{-3},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)\,y$ dar.

Zur Behandlung der inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = u(x)\,x^{-3}$, der Variation der Konstanten mit einer differenzierbaren Funktion $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Wegen

$$\varphi'(x) = u'(x)\,x^{-3} + u(x) \cdot \left(-3\,x^{-4}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ ist φ genau dann Lösung von $y' = a(x)\,y + b(x)$, wenn

$$u'(x)\,x^{-3} - 3\,u(x)\,x^{-4} = -\frac{3}{x}\left(u(x)\,x^{-3}\right) + 5\,x,$$

also

$$u'(x)\,x^{-3} = 5\,x \qquad \text{bzw.} \qquad u(x) = 5\,x^4$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt.

- Um eine partikuläre Lösung $\varphi_p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu erhalten, können wir speziell

  $$u(x) = x^5$$

  und damit

  $$\varphi_p(x) = u(x)\, x^{-3} = x^5 \cdot x^{-3} = x^2$$

  für alle $x \in \mathbb{R}^+$ wählen. Die allgemeine Lösung von $y' = a(x)\, y + b(x)$ ist damit die Gesamtheit der Funktionen

  $$\varphi_p + \varphi_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + c\, x^{-3},$$

  mit $c \in \mathbb{R}$.

- Um gleich die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu erhalten, wählen wir

  $$u(x) = x^5 + c$$

  für $c \in \mathbb{R}$ und damit

  $$\varphi(x) = u(x)\, x^3 = \big(x^5 + c\big) \cdot x^{-3} = x^2 + c\, x^{-3}$$

  für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

18. Es handelt sich um die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung $y' = a(x)\, y + b(x)$ mit den beiden stetigen Funktionen

$$a : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad a(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

und

$$b : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad b(x) = \cos^2 x.$$

Da

$$A : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad A(x) = -\ln|\cos x| \underset{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}}{=} -\ln(\cos x),$$

eine Stammfunktion von a ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\, e^{A(x)} = c\, e^{-\ln(\cos x)} = c \cdot \frac{1}{\cos x},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)\, y$ dar.

Zur Behandlung der inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz $\varphi : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = u(x) \cdot \frac{1}{\cos x}$, der Variation der Konstanten mit einer differenzierbaren Funktion $u : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$. Wegen

$$\varphi'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{\cos x} + u(x) \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ ist φ genau dann Lösung von $y' = a(x)\,y + b(x)$, wenn

$$u'(x) \cdot \frac{1}{\cos x} + u(x) \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot u(x) \cdot \frac{1}{\cos x} + \cos^2 x,$$

also

$$u'(x) = \cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x$$

für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ gilt; wir erhalten

$$u(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

für $c \in \mathbb{R}$ und damit

$$\varphi(x) = u(x) \cdot \frac{1}{\cos x} = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c\right) \cdot \frac{1}{\cos x}$$

für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Schließlich bestimmen wir die noch freie Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß $\varphi(0) = 1$ gilt; wegen

$$\varphi(0) = 1 \iff c = 1$$

ist

$$\varphi : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + 1\right) \cdot \frac{1}{\cos x},$$

die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

19. Zu betrachten ist die homogene lineare Differentialgleichung $y' = a(x)\,y$ mit der stetigen Funktion

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a(x) = -e^x.$$

Da

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A(x) = -e^x,$$

eine Stammfunktion von a ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\,e^{A(x)} = c\,e^{-e^x},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $y' = a(x)\,y$ dar. Wegen

$$\varphi_c(0) = -1 \iff c\,e^{-e^0} = -1 \iff c\,e^{-1} = -1 \iff c = -e$$

ist die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad -e \cdot e^{-e^x},$$

die Lösung des gestellten Anfangswertproblems

$$y' = -e^x\,y, \qquad y(0) = -1.$$

Zur Bestimmung der Menge $\varphi(\mathbb{R})$ ihrer Funktionswerte verwenden wir die bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktion: wegen

$$\{e^x \mid x \in \mathbb{R}\} =]0; \infty[\,, \qquad \text{also} \qquad \{-e^x \mid x \in \mathbb{R}\} =]-\infty; 0[\,,$$

ergibt sich

$$\left\{e^{-e^x} \mid x \in \mathbb{R}\right\} =]0; 1[\,, \qquad \text{also} \qquad \varphi(\mathbb{R}) = \left\{-e \cdot e^{-e^x} \mid x \in \mathbb{R}\right\} =]-e; 0[\,.$$

20. Wegen

$$y' + a\,y = e^{b\,x} \iff y' = (-a)\,y + e^{b\,x}$$

ist die lineare Differentialgleichung $y' = \alpha(x)\,y + \beta(x)$ mit den stetigen Funktionen

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha(x) = -a, \qquad \text{und} \qquad \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \beta(x) = e^{b\,x},$$

in Abhängigkeit von $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ zu betrachten. Da

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A(x) = -a\,x,$$

eine Stammfunktion von α ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\,e^{A(x)} = c\,e^{-a\,x},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = \alpha(x)\,y$ dar. Zur Behandlung der gegebenen inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = u(x) \cdot e^{-a\,x},$$

der Variation der Konstanten mit einer differenzierbaren Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wegen

$$\varphi'(x) = u'(x) \cdot e^{-a\,x} + u(x) \cdot \big(e^{-a\,x} \cdot (-a)\big)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist φ genau dann Lösung von $y' = \alpha(x)\,y + \beta(x)$, wenn

$$u'(x) \cdot e^{-a\,x} - a \cdot u(x) \cdot e^{-a\,x} = (-a) \cdot u(x) \cdot e^{-a\,x} + e^{b\,x},$$

also

$$u'(x) = e^{a\,x} \cdot e^{b\,x} = e^{(a+b)\,x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; wir erhalten

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{a+b}\,e^{(a+b)\,x} + c, & \text{falls } a+b \neq 0, \\ x + c, & \text{falls } a+b = 0, \end{cases}$$

für $c \in \mathbb{R}$ und damit

$$\varphi(x) = u(x) \cdot e^{-a\,x} = \begin{cases} \big(\frac{1}{a+b}\,e^{(a+b)\,x} + c\big)\,e^{-a\,x}, & \text{falls } a+b \neq 0, \\ (x+c)\,e^{-a\,x}, & \text{falls } a+b = 0, \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Für die Bestimmung der noch freien Konstante $c \in \mathbb{R}$ über die Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$ und die Untersuchung der Lösungsfunktion auf $\mathbb{R}^+$ treffen wir demnach die folgende Fallunterscheidung:

- Im Fall $a + b \neq 0$ erhält man

$$\varphi(0) = 0 \iff \left(\frac{1}{a+b}\,e^0 + c\right) e^0 = 0 \iff c = -\frac{1}{a+b};$$

damit ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{a+b}\, e^{(a+b)\,x} - \frac{1}{a+b}\right) e^{-a\,x} = \frac{1}{a+b}\left(e^{(a+b)\,x} - 1\right) e^{-a\,x} =$$
$$= \frac{1}{a+b}\left(e^{(a+b)\,x} \cdot e^{-a\,x} - e^{-a\,x}\right) = \frac{1}{a+b}\left(e^{b\,x} - e^{-a\,x}\right)$$

die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems; diese ist wegen $a + b \neq 0$ und damit $b \neq -a$ genau dann auf $\mathbb{R}^+$ beschränkt, wenn $b \leq 0$ und $-a \leq 0$, also $b \leq 0 \leq a$, gilt.

- Im Fall $a + b = 0$ erhält man

$$\varphi(0) = 0 \iff (0 + c)\, e^0 = 0 \iff c = 0;$$

damit ist
$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x\, e^{-a\,x},$$

die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems; diese ist genau dann auf $\mathbb{R}^+$ beschränkt, wenn $-a < 0$, also $0 < a$, gilt.