

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

13. Die gegebene Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 6x^2y - 5x^2 + 2x - 2y^3,$$

ist zweimal stetig partiell differenzierbar, und für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_1 f(x, y) = 12xy - 10x + 2 \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x, y) = 6x^2 - 6y^2,$$

also

$$\text{grad } f(x, y) = (12xy - 10x + 2, 6x^2 - 6y^2),$$

und damit

$$\partial_1 \partial_1 f(x, y) = 12y - 10 \quad \text{und} \quad \partial_2 \partial_1 f(x, y) = 12x$$

sowie

$$\partial_1 \partial_2 f(x, y) = 12x \quad \text{und} \quad \partial_2 \partial_2 f(x, y) = -12y,$$

also

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} 12y - 10 & 12x \\ 12x & -12y \end{pmatrix}.$$

Für einen kritischen Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ von f gilt $\text{grad } f(x, y) = (0, 0)$, also

$$12xy - 10x + 2 = 0 \quad \text{und} \quad 6x^2 - 6y^2 = 0;$$

aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$6x^2 = 6y^2, \quad \text{also} \quad x^2 = y^2, \quad \text{und damit} \quad x = y \quad \text{oder} \quad x = -y,$$

und wir treffen die folgende Fallunterscheidung:

- Für $x = y$ ergibt sich aus der ersten Gleichung

$$12x^2 - 10x + 2 = 0, \quad \text{also} \quad 6x^2 - 5x + 1 = 0,$$

und damit

$$x_{1,2} = \frac{1}{12} \left(5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1} \right) = \frac{5 \pm 1}{12},$$

also $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = \frac{1}{3}$.

- Für $x = -y$ ergibt sich aus der ersten Gleichung

$$-12x^2 - 10x + 2 = 0, \quad \text{also} \quad 6x^2 + 5x - 1 = 0,$$

und damit

$$x_{3,4} = \frac{1}{12} \left(-5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)} \right) = \frac{-5 \pm 7}{12},$$

also $x_3 = \frac{1}{6}$ und $x_4 = -1$.

Damit kommen als kritische Punkte von f nur die vier Punkte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ sowie $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$ und $(-1, 1)$ in Frage:

- Es ist

$$\text{grad } f \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = (0, 0) \quad \text{und} \quad \text{Hess } f \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix};$$

wegen $\det \text{Hess } f \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = -12 < 0$ ist $\text{Hess } f \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ indefinit. Folglich besitzt f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ einen Sattelpunkt.

- Es ist

$$\text{grad } f \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = (0, 0) \quad \text{und} \quad \text{Hess } f \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix};$$

wegen $\det \text{Hess } f \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = 8 > 0$ und $\text{Spur } \text{Hess } f \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = -10 < 0$ ist $\text{Hess } f \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$ negativ definit. Folglich besitzt f in $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ein (isoliertes) lokales Maximum.

- Es ist

$$\text{grad } f \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6} \right) = (0, 0) \quad \text{und} \quad \text{Hess } f \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6} \right) = \begin{pmatrix} -12 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

wegen $\det \text{Hess } f \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6} \right) = -28 < 0$ ist $\text{Hess } f \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6} \right)$ indefinit. Folglich besitzt f in $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$ einen Sattelpunkt.

- Es ist

$$\text{grad } f (-1, 1) = (0, 0) \quad \text{und} \quad \text{Hess } f (-1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ -12 & -12 \end{pmatrix};$$

wegen $\det \text{Hess } f (-1, 1) = -168 < 0$ ist $\text{Hess } f (-1, 1)$ indefinit. Folglich besitzt f in $(-1, 1)$ einen Sattelpunkt.

Zur Bestimmung des Wertebereichs W_f der Funktion f betrachten wir deren Verhalten auf der y -Achse $\{(0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$; wegen

$$f(0, t) = -2t^3 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}$$

ergibt sich schließlich der Wertebereich $W_f = \mathbb{R}$.

14. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + y^2 - xy - x,$$

ist (als Polynomfunktion) beliebig oft stetig differenzierbar, und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt zum einen

$$\partial_x f(x, y) = 3x^2 - y - 1 \quad \text{und} \quad \partial_y f(x, y) = 2y - x,$$

also

$$\text{grad } f(x, y) = (3x^2 - y - 1, 2y - x),$$

und zum anderen

$$\partial_x \partial_x f(x, y) = 6x \quad \text{und} \quad \partial_y \partial_y f(x, y) = 2$$

sowie

$$\partial_x \partial_y f(x, y) = -1 = \partial_y \partial_x f(x, y),$$

also

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Als lokale Extremstellen oder Sattelpunkte der auf ganz \mathbb{R}^2 definierten und partiell differenzierbaren Funktion f kommen ausschließlich ihre kritischen Stellen, also die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\text{grad } f(x, y) = (0, 0)$ in Frage. Mit

$$\partial_y f(x, y) = 0 \iff 2y - x = 0 \iff x = 2y$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) = 0 &\iff 3x^2 - y - 1 = 0 \\ &\stackrel{x=2y}{\iff} 3(2y)^2 - y - 1 = 0 \iff 12y^2 - y - 1 = 0 \\ &\iff y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-1)}}{2 \cdot 12} \\ &\iff y = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{24} = \frac{1 \pm 7}{24} \iff y \in \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \right\}; \end{aligned}$$

damit besitzt f genau die beiden kritischen Punkte $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ und $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$, die wir nun mit Hilfe der Hessematrix näher untersuchen:

- Es ist $\text{grad } f(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = (0, 0)$ mit

$$H_1 = \text{Hess } f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

wegen $\det(H_1) = 7 > 0$ und $\text{Spur}(H_1) = 6 > 0$ ist H_1 positiv definit, so daß f in $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ein isoliertes lokales Minimum besitzt.

- Es ist $\text{grad } f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = (0, 0)$ mit

$$H_2 = \text{Hess } f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

wegen $\det(H_2) = -7 < 0$ ist H_2 indefinit, so daß f in $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ einen Sattelpunkt besitzt.

- b) Das gegebene Rechteck

$$R = [-1, 1] \times [-1, 2] \subseteq \mathbb{R}^2$$

mit den Ecken $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 2)$ und $(-1, 2)$ ist eine abgeschlossene wie auch beschränkte und damit kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^2 , so daß die (als Polynomfunktion insbesondere) stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nach dem Satz von Weierstraß auf R (mindestens) eine globale Minimalstelle und (mindestens) eine globale Maximalstelle besitzt.

Da die Funktion f darüber hinaus partiell differenzierbar ist, kommen für globale Extremstellen $(a, b) \in R$ von f neben der in a) ermittelten lokalen Minimalstelle $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ nur Punkte auf dem Rand ∂R des Rechtecks R in Frage:

- Für die Punkte $(-1, t)$ mit $t \in [-1, 2]$ der linken Rechteckseite gilt

$$f(-1, t) = (-1)^3 + t^2 - (-1) \cdot t - (-1) = t^2 + t;$$

da die quadratische Hilfsfunktion

$$h_1 : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_1(t) = t^2 + t,$$

ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 2$, sowie in den Nullstellen ihrer Ableitung

$$h_1'(t) = 2t + 1,$$

also in $t = -\frac{1}{2}$ annehmen kann, kommen für (a, b) nur die Punkte $(-1, -1)$, $(-1, -\frac{1}{2})$ und $(-1, 2)$ in Frage.

- Für die Punkte $(1, t)$ mit $t \in [-1, 2]$ der rechten Rechteckseite gilt

$$f(1, t) = 1^3 + t^2 - 1 \cdot t - (-1) = t^2 - t;$$

da die quadratische Hilfsfunktion

$$h_2 : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_2(t) = t^2 - t,$$

ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 2$, sowie in den Nullstellen ihrer Ableitung

$$h_2'(t) = 2t - 1,$$

also in $t = \frac{1}{2}$ annehmen kann, kommen für (a, b) nur die Punkte $(1, -1)$, $(1, \frac{1}{2})$ und $(1, 2)$ in Frage.

- Für die Punkte $(t, -1)$ mit $t \in [-1, 1]$ der unteren Rechteckseite gilt

$$f(t, -1) = t^3 + (-1)^2 - t \cdot (-1) - t = t^3 + 1;$$

da die kubische Hilfsfunktion

$$h_3 : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_3(t) = t^3 + 1,$$

bekanntlich streng monoton wächst und damit ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 1$, annehmen kann, kommen für (a, b) nur die Punkte $(-1, -1)$ und $(1, -1)$ in Frage.

- Für die Punkte $(t, 2)$ mit $t \in [-1, 1]$ der oberen Rechteckseite gilt

$$f(t, 2) = t^3 + 2^2 - t \cdot 2 - t = t^3 - 3t + 4;$$

da die kubische Hilfsfunktion

$$h_4 : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_4(t) = t^3 - 3t + 4,$$

ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 1$, die hier mit den Nullstellen ihrer Ableitung

$$h'_4(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2 - 1) = 3(t - 1)(t + 1)$$

zusammenfallen, annehmen kann, kommen für (a, b) nur die Punkte $(-1, 2)$ und $(1, 2)$ in Frage.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(a, b)	$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(-1, -1)$	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(-1, 2)$	$(1, -1)$	$(1, \frac{1}{2})$	$(1, 2)$
$f(a, b)$	$-\frac{13}{27}$	0	$-\frac{1}{4}$	6	2	$-\frac{1}{4}$	2

erkennt man, daß f den maximalen Funktionswert 6 im Punkt $(-1, 2)$ sowie den minimalen Funktionswert $-\frac{13}{27}$ im Punkt $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ annimmt.

15. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x y \exp(x - y),$$

ist als Produkt und Verknüpfung linearer Funktionen und der Exponentialfunktion partiell differenzierbar, und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= y \cdot \exp(x - y) + x y \cdot (\exp(x - y) \cdot 1) = \\ &= (y + x y) \exp(x - y) = y(1 + x) \exp(x - y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_y f(x, y) &= x \cdot \exp(x - y) + x y \cdot (\exp(x - y) \cdot (-1)) = \\ &= (x - x y) \exp(x - y) = x(1 - y) \exp(x - y), \end{aligned}$$

insgesamt also

$$\begin{aligned}\text{grad } f(x, y) &= (\partial_x f(x, y), \partial_y f(x, y)) = \\ &= (y(1+x) \exp(x-y), x(1-y) \exp(x-y)).\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) = 0 &\iff y(1+x) \underbrace{\exp(x-y)}_{>0} = 0 \iff \\ &\iff (y=0 \text{ oder } 1+x=0) \iff (y=0 \text{ oder } x=-1)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_y f(x, y) = 0 &\iff x(1-y) \underbrace{\exp(x-y)}_{>0} = 0 \iff \\ &\iff (x=0 \text{ oder } 1-y=0) \iff (x=0 \text{ oder } y=1)\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\text{grad } f(x, y) = (0, 0) \iff ((x, y) = (0, 0) \text{ oder } (x, y) = (-1, 1)).$$

- b) Die gegebene Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist sogar beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}\partial_x \partial_x f(x, y) &= y \cdot \exp(x-y) + y(1+x) \cdot (\exp(x-y) \cdot 1) = \\ &= (y + y(1+x)) \exp(x-y) = y(2+x) \exp(x-y)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_y \partial_y f(x, y) &= -x \cdot \exp(x-y) + x(1-y) \cdot (\exp(x-y) \cdot (-1)) = \\ &= (-x - x(1-y)) \exp(x-y) = x(y-2) \exp(x-y)\end{aligned}$$

sowie unter Verwendung des Satzes von Schwarz

$$\begin{aligned}\partial_x \partial_y f(x, y) &= \partial_y \partial_x f(x, y) = \\ &= (1+x) \cdot \exp(x-y) + y(1+x) \cdot (\exp(x-y) \cdot (-1)) = \\ &= ((1+x) - y(1+x)) \exp(x-y) = (1+x)(1-y) \exp(x-y),\end{aligned}$$

und wir erhalten die Hessematrix

$$\begin{aligned}\text{Hess } f(x, y) &= \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x f(x, y) & \partial_x \partial_y f(x, y) \\ \partial_y \partial_x f(x, y) & \partial_y \partial_y f(x, y) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} y(2+x) \exp(x-y) & (1+x)(1-y) \exp(x-y) \\ (1+x)(1-y) \exp(x-y) & x(y-2) \exp(x-y) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Als lokale Extremstellen der partiell differenzierbaren und auf ganz \mathbb{R}^2 definierten Funktion f kommen nur ihre kritischen Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\text{grad } f(x, y) = (0, 0)$, gemäß a) also $(0, 0)$ und $(-1, 1)$, in Frage.

- Die Hessematrix

$$\text{Hess } f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist wegen $\det \text{Hess } f(0, 0) = -1 < 0$ indefinit; damit besitzt f in $(0, 0)$ einen Sattelpunkt, insbesondere also kein lokales Extremum.

- Die Hessematrix

$$\text{Hess } f(-1, 1) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$$

besitzt den doppelten Eigenwert $e^{-2} > 0$ und ist demnach positiv definit; damit besitzt f in $(-1, 1)$ ein (isoliertes) lokales Minimum.

16. Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x^2 + 1) (\sin(\pi y) + 2),$$

ist (als Produkt einer quadratischen und einer trigonometrischen Funktion) beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_x f(x, y) = 2x (\sin(\pi y) + 2) \quad \text{und} \quad \partial_y f(x, y) = (x^2 + 1) \pi \cos(\pi y),$$

also

$$\text{grad } f(x, y) = (2x (\sin(\pi y) + 2), (x^2 + 1) \pi \cos(\pi y)),$$

sowie

$$\partial_x \partial_x f(x, y) = 2 (\sin(\pi y) + 2) \quad \text{und} \quad \partial_y \partial_y f(x, y) = -(x^2 + 1) \pi^2 \sin(\pi y)$$

mit

$$\partial_x \partial_y f(x, y) = 2x \pi \cos(\pi y) = \partial_y \partial_x f(x, y),$$

also

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 (\sin(\pi y) + 2) & 2x \pi \cos(\pi y) \\ 2x \pi \cos(\pi y) & -(x^2 + 1) \pi^2 \sin(\pi y) \end{pmatrix}.$$

Als Extremstellen der auf ganz \mathbb{R}^2 definierten und partiell differenzierbaren Funktion f kommen nur ihre kritischen Stellen, also die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\text{grad } f(x, y) = (0, 0)$ in Frage, wegen

$$\partial_x f(x, y) = 0 \iff 2x \underbrace{(\sin(\pi y) + 2)}_{\geq (-1) + 2 = 1 > 0} = 0 \iff x = 0$$

und

$$\begin{aligned} \partial_y f(x, y) = 0 &\iff \underbrace{(x^2 + 1)}_{\geq 1 > 0} \pi \cos(\pi y) = 0 \iff \\ &\iff \cos(\pi y) = 0 \iff \pi y \in \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z} \cdot \pi \iff y \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

also genau die Punkte $(0, y_k)$ mit $y_k = \frac{1}{2} + k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Wir untersuchen nun diese kritischen Stellen mit Hilfe der Hessematrix, wobei wegen

$$\begin{aligned} \text{Hess } f(0, y_k) &= \begin{pmatrix} 2(\sin(\pi y_k) + 2) & 0 \cdot \cos(\pi y_k) \\ 0 \cdot \cos(\pi y_k) & -\pi^2 \sin(\pi y_k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) + 2) & 0 \\ 0 & -\pi^2 \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Ist $k \in \mathbb{Z}$ gerade, so gilt $\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 1$; damit besitzt

$$\text{Hess } f(0, y_k) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -\pi^2 \end{pmatrix}$$

den positiven Eigenwert 6 und den negativen Eigenwert $-\pi^2$ und ist folglich indefinit. Somit ist $(0, y_k)$ ein Sattelpunkt von f , insbesondere also kein lokales Extremum von f .

- Ist $k \in \mathbb{Z}$ ungerade, so gilt $\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -1$; damit besitzt

$$\text{Hess } f(0, y_k) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \pi^2 \end{pmatrix}$$

die beiden positiven Eigenwerte 2 und π^2 und ist folglich positiv definit. Somit ist $(0, y_k)$ ein isoliertes lokales Minimum von f , insbesondere also kein lokales Maximum von f .

Diese Überlegungen beantworten die Teilaufgaben a) und b) folgendermaßen:

- Die Funktion f besitzt unendlich viele isolierte lokale Minima, nämlich die Punkte $(0, \frac{1}{2} + k)$ für alle ungeraden $k \in \mathbb{Z}$.
- Die Funktion f besitzt keine lokalen Maxima, da die in Frage kommenden kritischen Stellen entweder isolierte lokale Minima oder Sattelpunkte sind.
- Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f(x, y) = \underbrace{\left(\underbrace{x^2}_{\geq 0} + 1 \right)}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\sin(\pi y)}_{\geq -1} + 2 \right)}_{\geq 1} \geq 1;$$

damit ist zunächst $f(\mathbb{R}^2) \subseteq [1, \infty[$. Für „ \supseteq “ sei $z \in [1, \infty[$; wegen $z \geq 1$ ist $z - 1 \geq 0$ und damit $(\sqrt{z-1}, -\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$, und es gilt

$$f\left(\sqrt{z-1}, -\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\left(\sqrt{z-1}^2 + 1\right)}_{=z-1} \cdot \underbrace{\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\right)}_{=-1} = z \cdot 1 = z,$$

also $z \in f(\mathbb{R}^2)$. Insgesamt erhält man $f(\mathbb{R}^2) = [1, \infty[$.