MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 3
28.10.2014

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

9. Bei der Definitionsmenge

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

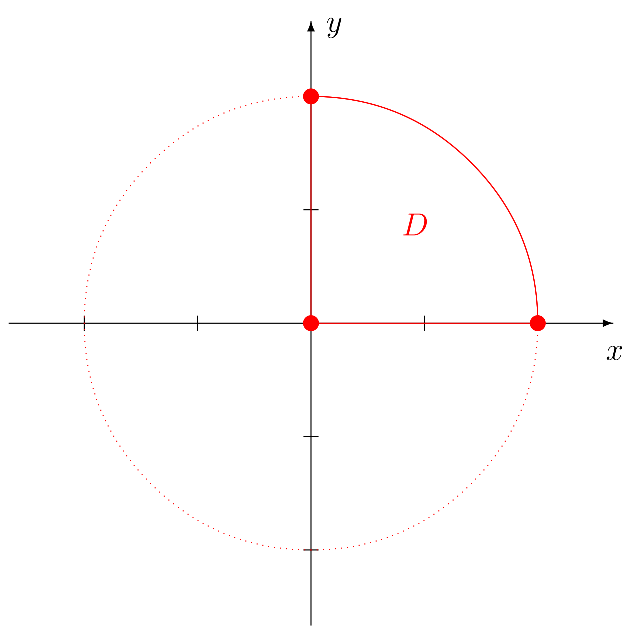
handelt es sich um den im abgeschlossenen 1. Quadranten liegenden Teil der Einheitskreisscheibe; damit ist eine D abgeschlossene und beschränkte, mithin kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Folglich besitzt die (als Komposition des Sinus und einer Polynomfunktion) insbesondere stetige Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sin(xy),$$

nach dem Satz von Weierstraß globale Extremstellen, so daß

- sowohl die Menge M_1 der globalen Maxima von f, also aller $(a, b) \in D$ mit $f(x, y) \leq f(a, b)$ für alle $(x, y) \in D$,
- als auch die Menge M_2 der globalen Minima von f, also aller $(a, b) \in D$ mit $f(a, b) \leq f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D$,

nicht leer ist. Zur Bestimmung der globalen Extremstellen (a, b), also der Mengen M_1 und M_2, treffen wir die folgende Fallunterscheidung:



- Der Punkt (a, b) liegt auf dem Rand ∂D von D:
  - für die Punkte der unteren Strecke gilt $(t, 0)$ mit $t \in [0; 1]$ und damit

    $$f(t, 0) = \sin(t \cdot 0) = \sin 0 = 0.$$

  - für die Punkte der linken Strecke gilt $(0, t)$ mit $t \in [0; 1]$ und damit

    $$f(0, t) = \sin(0 \cdot t) = \sin 0 = 0.$$

  - für die Punkte (x, y) auf dem Viertelkreisbogen betrachten wir die Polarkoordinaten $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$ mit $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ und erhalten

    $$f(x, y) = \sin(xy) = \sin(\cos\varphi \cdot \sin\varphi) = \sin\left(\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right);$$

    die differenzierbare Hilfsfunktion

    $$h : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = \sin\left(\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right),$$

    kann Extrema nur in den Randpunkten 0 und $\frac{\pi}{2}$ des Definitionsintervalls $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ und in den Nullstellen der Ableitung h' annehmen, wegen

    $$h'(\varphi) = \underbrace{\cos\underbrace{\left(\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right)}_{\in\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}}_{>0} \cdot \cos(2\varphi) \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

    für $\cos(2\varphi) = 0$, also für $2\varphi = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Damit ergeben sich als Kandidaten für globale Extremstellen
    - für $\varphi = 0$ den Punkt $(1, 0)$ mit $f(1, 0) = 0$,
    - für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ den Punkt $(0, 1)$ mit $f(0, 1) = 0$ und
    - für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ den Punkt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ mit $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin\frac{1}{2}$.

- Der Punkt (a, b) liegt im Innern $\overset{\circ}{D}$ von D; da f (als Komposition des Sinus und einer Polynomfunktion) insbesondere partiell differenzierbar ist mit

  $$\partial_x f(x, y) = \cos(xy) \cdot y \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x, y) = \cos(xy) \cdot x$$

  für alle $(x, y) \in \overset{\circ}{D}$, muß dann (a, b) eine kritische Stelle von f sein, es muß also $\operatorname{grad} f(a, b) = (0, 0)$ gelten. Wegen $0 < a < 1$ und $0 < b < 1$ ist auch $0 < ab < 1$ und damit, da der Cosinus auf $[0; 1]$ streng monoton fällt, aber

  $$\partial_x f(a, b) = \underbrace{\cos(ab)}_{>\cos 1>0} \cdot \underbrace{b}_{>0} > 0 \quad \text{bzw.} \quad \partial_y f(a, b) = \underbrace{\cos(ab)}_{>\cos 1>0} \cdot \underbrace{a}_{>0} > 0.$$

Damit nimmt die Funktion f

- im Punkt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ihr globales Maximum $\sin \frac{1}{2}$ an, es ist also
$$M_1 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\},$$
- in den Punkten $(t, 0)$ und $(0, t)$ mit $t \in [0; 1]$ ihr globales Minimum 0 an, es ist also
$$M_2 = \big\{ (t, 0) \mid t \in [0; 1] \big\} \cup \big\{ (0, t) \mid t \in [0; 1] \big\}.$$

10. Die Definitionsmenge
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
ist die abgeschlossene Kreisscheibe um den Mittelpunkt $(0, 0)$ mit dem Radius 2; insbesondere ist D eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Damit besitzt die (als Polynomfunktion insbesondere) stetige Funktion
$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 4xy - x^3y - xy^3,$$
nach dem Satz von Weierstraß mindestens ein globales Minimum und mindestens ein globales Maximum, es gibt also (a, b) und $(c, d) \in D$ mit
$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d)$$
für alle $(x, y) \in D$; für die Lage dieser Extremstellen $(p, q) \in D$ gibt es die folgenden beiden Möglichkeiten:
   - (p, q) liegt auf dem Rand von D, also auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 4$ um $(0, 0)$ mit Radius 2, womit sich allerdings
$$f(p, q) = 4\,p\,q - p^3q - pq^3 = p\,q\,\big(4 - \underbrace{(p^2 + q^2)}_{=4}\big) = 0$$
ergibt.
   - (p, q) liegt im Innern von D; also in der offenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 < 4$; da aber f partiell differenzierbar mit
$$\partial_1 f(x, y) = 4y - 3x^2y - y^3 = y\left(4 - 3x^2 - y^2\right)$$
und
$$\partial_2 f(x, y) = 4x - x^3 - 3xy^2 = x\left(4 - x^2 - 3y^2\right)$$
für alle $(x, y) \in D$ ist, muß (p, q) dann eine kritische Stelle von f sein, so daß wegen
$$\partial_1 f(p, q) = 0 \iff q = 0 \quad \text{oder} \quad 3p^2 + q^2 = 4$$
und
$$\partial_2 f(p, q) = 0 \iff p = 0 \quad \text{oder} \quad p^2 + 3q^2 = 4$$
die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Es ist $q = 0$ und $p = 0$, also $(p, q) = (0, 0)$.
- Es ist $q = 0$ und $p^2 + 3q^2 = 4$, woraus sich $p^2 = 4$ und damit $p = \pm 2$ ergibt; die Punkte $(p, q) = (\pm 2, 0)$ liegen allerdings auf dem Rand und damit nicht im Innern von D.
- Es ist $3p^2 + q^2 = 4$ und $p = 0$, woraus sich $q^2 = 4$ und damit $q = \pm 2$ ergibt; die Punkte $(p, q) = (0, \pm 2)$ liegen allerdings auf dem Rand und damit nicht im Innern von D.
- Es ist $3p^2 + q^2 = 4$ und $p^2 + 3q^2 = 4$, woraus sich $p^2 = 1$ und $q^2 = 1$ und damit $p = \pm 1$ und $q = \pm 1$, also für (p, q) die Punkte $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ und $(-1, -1)$ ergibt.

Der Vergleich der Funktionswerte

(p,q)	$\in \partial D$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,-1)$
$f(p,q)$	0	0	2	-2	-2	2

zeigt, daß die Funktion f in Punkten $(1, 1)$ und $(-1, -1)$ ihr Maximum 2 sowie in den Punkten $(1, -1)$ und $(-1, 1)$ ihr Minimum -2 annimmt.

11. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x + y) \cdot e^{x\,y},$$

ist als Produkt einer linearen Funktion und einer Exponentialfunktion partiell differenzierbar, und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_x f(x, y) = 1 \cdot e^{x\,y} + (x + y) \cdot (e^{x\,y} \cdot y) = \left(1 + x\,y + y^2\right) e^{x\,y}$$

sowie

$$\partial_y f(x, y) = 1 \cdot e^{x\,y} + (x + y) \cdot (e^{x\,y} \cdot x) = \left(1 + x\,y + x^2\right) e^{x\,y}.$$

Für einen kritischen Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ müßte

$$\partial_x f(x, y) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x, y) = 0,$$

wegen $e^{xy} > 0$ also

$$1 + x\,y + y^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad 1 + x\,y + x^2 = 0,$$

gelten, woraus

$$y^2 = -\,(1 + x\,y) = x^2, \qquad \text{also} \qquad y = x \;\text{ oder }\; y = -x,$$

und damit für $y = x$ in $1 + 2\,x^2 = 0$ sowie für $y = -x$ in $1 = 0$ jeweils ein Widerspruch entsteht. Folglich kann f keine kritischen Punkte besitzen.

b) Die abgeschlossene Kreisscheibe

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 2\}$$

mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius $\sqrt{2}$ ist kompakt, so daß die (als Produkt stetiger Funktionen) stetige Funktion f nach dem Satz von Weierstraß auf K an mindestens einer Stelle p das globale Minimum $f(p)$ und an mindestens einer Stelle q das globale Maximum $f(q)$ annimmt. Da f gemäß a) partiell differenzierbar ohne kritische Punkte ist, liegen diese Extremstellen auf dem Rand von K, also auf der Kreislinie

$$\partial K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\}$$

mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius $\sqrt{2}$. Wir betrachten für den Punkt $(x,y) \in \partial K$ die Darstellung $x = \sqrt{2}\cos\varphi$ und $y = \sqrt{2}\sin\varphi$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ in Polarkoordinaten und erhalten

$$\begin{aligned} f(x,y) = (x+y) \cdot e^{x\,y} &= (\sqrt{2}\cos\varphi + \sqrt{2}\sin\varphi) \cdot e^{(\sqrt{2}\cos\varphi)(\sqrt{2}\sin\varphi)} \\ &= \sqrt{2}\,(\cos\varphi + \sin\varphi) \cdot e^{2\cos\varphi\sin\varphi}; \end{aligned}$$

als Extremstellen der differenzierbaren Hilfsfunktion

$$h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = \sqrt{2}\,(\cos\varphi + \sin\varphi) \cdot e^{2\cos\varphi\sin\varphi},$$

kommen neben den beiden Randpunkten 0 und 2π von $[0, 2\pi]$ nur die Nullstellen der Ableitung

$$\begin{aligned} h'(\varphi) &= \sqrt{2}\,(-\sin\varphi + \cos\varphi) \cdot e^{2\cos\varphi\sin\varphi} + \\ &\quad \sqrt{2}\,(\cos\varphi + \sin\varphi) \cdot \left(e^{2\cos\varphi\sin\varphi} \cdot 2\,(-\sin\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\cos\varphi)\right) \\ &= \sqrt{2}\,(\cos\varphi - \sin\varphi) \cdot \underbrace{e^{2\cos\varphi\sin\varphi}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(1 + 2\,(\cos\varphi + \sin\varphi)^2\right)}_{\ge 1}, \end{aligned}$$

also $\varphi \in [0, 2\pi]$ mit $\cos\varphi = \sin\varphi$, und damit $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ in Frage, so daß sich die globalen Extrema von f unter den Punkten

$$\underbrace{(\sqrt{2}, 0)}_{\text{für } \varphi = 0 \text{ und } \varphi = 2\pi} \qquad \text{sowie} \qquad \underbrace{(1,1)}_{\text{für } \varphi = \frac{\pi}{4}} \qquad \text{und} \qquad \underbrace{(-1,-1)}_{\text{für } \varphi = \frac{5\pi}{4}}$$

finden. Die Wertetabelle

(x,y)	$(\sqrt{2}, 0)$	$(1,1)$	$(-1,-1)$
$f(x,y)$	$\sqrt{2}$	$2\,e$	$-2\,e$

zeigt, daß f in $p = (-1,-1)$ das globale Minimum $f(p) = -2\,e$ sowie in $q = (1,1)$ das globale Maximum $f(q) = 2\,e$ annimmt.

12. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(r) = e^{-r^2} + r^2,$$

ist als Summe und Komposition der Exponentialfunktion und quadratischer Funktionen stetig und (beliebig oft) differenzierbar, und für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(r) = e^{-r^2} \cdot (-2\,r) + 2\,r = 2\,r\left(1 - e^{-r^2}\right).$$

Für alle $r \neq 0$ ist $r^2 > 0$, also $-r^2 < 0$, und unter Verwendung des Monotonieverhaltens der Exponentialfunktion damit

$$e^{-r^2} < e^0 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad 1 - e^{-r^2} > 0,$$

woraus sich

$$f'(r) = 2\,r \cdot \underbrace{\left(1 - e^{-r^2}\right)}_{>0} \begin{cases} > 0, & \text{für } r > 0, \\ < 0, & \text{für } r < 0, \end{cases}$$

ergibt; damit ist die stetige Funktion f auf $]-\infty; 0]$ streng monoton fallend und auf $[0; +\infty[$ streng monoton wachsend, besitzt also genau eine globale Extremstelle, nämlich ein globales Minimum in $r = 0$ mit $f(0) = 1$.

b) Die gegebene Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = e^{-x^2-y^2} + x^2 + y^2,$$

ist als Summe und Komposition der Exponentialfunktion und quadratischer Funktionen beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_x g(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cdot (-2\,x) + 2\,x = 2\,x\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right)$$

und

$$\partial_y g(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cdot (-2\,y) + 2\,y = 2\,y\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right)$$

sowie

$$\begin{aligned} \partial_x\partial_x g(x, y) &= 2\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right) + 2\,x\left(-e^{-x^2-y^2} \cdot (-2\,x)\right) \\ &= 2\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right) + 4\,x^2\,e^{-x^2-y^2}, \end{aligned}$$

entsprechend

$$\begin{aligned} \partial_y\partial_y g(x, y) &= 2\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right) + 2\,y\left(-e^{-x^2-y^2} \cdot (-2\,y)\right) \\ &= 2\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right) + 4\,y^2\,e^{-x^2-y^2}, \end{aligned}$$

und unter Verwendung des Satzes von Schwarz

$$\partial_x\partial_y g(x, y) = \partial_y\partial_x g(x, y) = 2\,x\left(-e^{-x^2-y^2} \cdot (-2\,y)\right) = 4\,x\,y\,e^{-x^2-y^2}.$$

Für einen kritischen Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ von g gilt

$$\partial_x g(x,y) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_y g(x,y) = 0;$$

wegen

$$1 - e^{-x^2-y^2} = 0 \iff e^{-x^2-y^2} = 1 \iff -x^2 - y^2 = 0 \iff \\ \iff x^2 + y^2 = 0 \iff \big(x = 0 \quad \text{und} \quad y = 0\big)$$

ergibt sich

$$\partial_x g(x,y) = 0 \iff 2\,x\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right) = 0 \iff \\ \iff \big(x = 0 \quad \text{oder} \quad 1 - e^{-x^2-y^2} = 0\big) \iff x = 0$$

und entsprechend

$$\partial_y g(x,y) = 0 \iff 2\,y\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right) = 0 \iff \\ \iff \big(y = 0 \quad \text{oder} \quad 1 - e^{-x^2-y^2} = 0\big) \iff y = 0.$$

Damit besitzt g genau einen kritischen Punkt, nämlich $(0,0)$, und es gilt

$$\operatorname{Hess} g(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x\partial_y g(0,0) & \partial_x\partial_y g(0,0) \\ \partial_y\partial_x g(0,0) & \partial_y\partial_y g(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Als globale Extremstelle der partiell differenzierbaren und auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion g kommt nur ihr kritischer Punkt $(0,0)$ mit

$$g(0,0) = e^{-0^2-0^2} + 0^2 + 0^2 = e^0 = 1$$

in Frage. Für einen Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir seine Polarkoordinaten $x = r\,\cos\varphi$ und $y = r\,\sin\varphi$ mit $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ und erhalten

$$x^2 + y^2 = (r\,\cos\varphi)^2 + (r\,\sin\varphi)^2 = r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r^2$$

und damit

$$g(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} + \left(x^2 + y^2\right) = e^{-r^2} + r^2 = f(r) \underset{\text{a)}}{\geq} f(0) = 1 = g(0,0);$$

folglich besitzt g in $(0,0)$ ein globales Minimum.