MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 2
21.10.2014

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

5. a) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1 \, e^{-x_2},$$

ist partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = e^{-x_2}$$

und

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = x_1 \left(e^{-x_2} \cdot (-1)\right) = -x_1 \, e^{-x_2}$$

für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

b) Die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2) \cdot \cos(x_1 - x_2),$$

ist partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \partial_1 g(x_1, x_2) &= \cos(x_1 + x_2) \cdot \cos(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2) \cdot (-\sin(x_1 - x_2)) \\ &= \cos(x_1 + x_2) \cdot \cos(x_1 - x_2) - \sin(x_1 + x_2) \cdot \sin(x_1 - x_2) \\ &= \cos\left((x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)\right) \\ &= \cos\left(2x_1\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_2 g(x_1, x_2) &= \cos(x_1 + x_2) \cdot \cos(x_1 - x_2) + \\ &\qquad + \sin(x_1 + x_2) \cdot (-\sin(x_1 - x_2) \cdot (-1)) \\ &= \cos(x_1 + x_2) \cdot \cos(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2) \cdot \sin(x_1 - x_2) \\ &= \cos\left((x_1 + x_2) - (x_1 - x_2)\right) \\ &= \cos\left(2x_2\right) \end{aligned}$$

für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

c) Die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{x_1^2 + 1}{x_2^2 + 1}} = \left(x_1^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x_2^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}},$$

ist partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 h(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{2}\left(x_1^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x_1)\right) \cdot \left(x_2^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= x_1 \cdot \left(x_1^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(x_2^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x_1}{\sqrt{\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)}}$$

und

$$\partial_2 h(x_1,x_2) = \left(x_1^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \left(x_2^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x_2)\right) =$$
$$= -x_2 \cdot \left(x_1^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x_2^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{x_2}{x^2+1} \cdot \sqrt{\frac{x_1^2+1}{x_2^2+1}}$$

für alle $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

d) Die Funktion

$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad k(x_1,x_2) = \left(x_1^2+1\right)^{-x_2} = e^{-x_2 \ln\left(x_1^2+1\right)},$$

ist partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 k(x_1,x_2) = -x_2 \left(x_1^2+1\right)^{-x_2-1} \cdot (2x_1) = -2x_1x_2 \left(x_1^2+1\right)^{-x_2-1}$$

(über die Ableitung als Potenzfunktion) oder

$$\partial_1 k(x_1,x_2) = e^{-x_2 \ln\left(x_1^2+1\right)} \cdot \left(-x_2 \cdot \frac{1}{x_1^2+1} \cdot (2x_1)\right) =$$
$$= -e^{-x_2 \ln\left(x_1^2+1\right)} \cdot \frac{2x_1x_2}{x_1^2+1} = -\left(x_1^2+1\right)^{-x_2} \cdot \frac{2x_1x_2}{x_1^2+1}$$

und

$$\partial_2 k(x_1,x_2) = \left(x_1^2+1\right)^{-x_2} \ln\left(x_1^2+1\right) \cdot (-1) = -\left(x_1^2+1\right)^{-x_2} \cdot \ln\left(x_1^2+1\right)$$

(über die Ableitung als Exponentialfunktion) oder

$$\partial_2 k(x_1,x_2) = e^{-x_2 \ln\left(x_1^2+1\right)} \cdot \left(-\ln\left(x_1^2+1\right)\right) =$$
$$= -e^{-x_2 \ln\left(x_1^2+1\right)} \cdot \ln\left(x_1^2+1\right) = -\left(x_1^2+1\right)^{-x_2} \cdot \ln\left(x_1^2+1\right).$$

6. a) Für alle $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{\left|\sin\left(x^3+y^3\right)\right|}{x^2+y^2} \underset{|\sin t| \leq |t|}{\leq}$$
$$\leq \frac{\left|x^3+y^3\right|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} =$$
$$= \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \cdot |x| + \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \cdot |y| \leq |x| + |y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 + 0 = 0;$$

damit gilt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0),$$

weswegen f im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

b) Wir betrachten den Differenzenquotienten der Funktion f im Punkt $(0,0)$ in x–Richtung

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{\frac{\sin\left(h^3+0^3\right)}{h^2+0^2} - 0}{h} = \frac{\sin h^3}{h^3}$$

für $h \neq 0$ und bestimmen seinen Grenzwert für $h \to 0$ mit Hilfe der Regel von de l'Hospital. Wegen

$$\frac{(\cos h^3)\cdot(3\,h^2)}{3\,h^2} = \cos h^3 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \cos 0 = 1$$

existiert auch der Grenzwert

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h^3}{h^3} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h^3)\cdot(3\,h^2)}{3\,h^2} = 1.$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich entsprechend

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 1.$$

Damit ist die Funktion f im Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar ist mit

$$\operatorname{grad} f(0,0) = (\partial_x f(0,0),\ \partial_y f(0,0)) = (1,1).$$

7. a) Die Einheitskreisscheibe

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$

ist eine sowohl abgeschlossene als auch beschränkte und damit kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$; darüber hinaus ist die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 - 3\,x\,y^2,$$

als Polynomfunktion insbesondere stetig. Nach dem Satz von Weierstraß besitzt damit die stetige Funktion f auf der kompakten Menge D eine globale Minimalstelle $(p_1,q_1) \in D$ und eine globale Maximalstelle $(p_2,q_2) \in D$, für alle $(x,y) \in D$ gilt also $f(p_1,q_1) \leq f(x,y) \leq f(p_2,q_2)$.

b) Die Polynomfunktion f ist insbesondere partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in D$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) = 3\,x^2 - 3\,y^2 \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y) = -6\,x\,y.$$

Damit kommen für globale Extremstellen $(a,b) \in D$ nur die beiden folgenden Fälle in Frage:

- Der Punkt (a, b) liegt auf dem Rand ∂D von D; wir betrachten für die Punkte der Einheitskreislinie ∂D die Darstellung $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ in Polarkoordinaten mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und erhalten

  $$f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos^3\varphi - 3\,\cos\varphi \underbrace{\sin^2\varphi}_{=1-\cos^2\varphi} = 4\,\cos^3\varphi - 3\,\cos\varphi.$$

  Die differenzierbare Hilfsfunktion

  $$h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = 4\,\cos^3\varphi - 3\,\cos\varphi,$$

  kann ihre Extremwerte in den Randpunkten $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ ihres Definitionsintervalls oder in den Nullstellen ihrer Ableitung

  $$h'(\varphi) = 4\left(3\,\cos^2\varphi \cdot (-\sin\varphi)\right) - 3\,(-\sin\varphi) = -12\sin\varphi\left(\cos^2\varphi - \tfrac{1}{4}\right),$$

  also für $\sin\varphi = 0$ oder $\cos\varphi = \pm\frac{1}{2}$ annehmen; damit kommen für φ nur die Werte 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ und 2π, also für (a, b) die Punkte $(\pm 1, 0)$ sowie $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ in Frage.
- Der Punkt (a, b) liegt im Innern $\overset{\circ}{D}$ von D; dann ist aber (a, b) ein kritischer Punkt von f, es gilt also $\operatorname{grad} f(a, b) = (0, 0)$. Aus $\partial_1 f(a, b) = 3\,a^2 - 3\,b^2 = 0$ folgt zunächst $a^2 = b^2$, also $a = \pm b$, woraus sich mit $\partial_2 f(a, b) = -6a\,b = 0$ dann $\mp 6\,b^2 = 0$, also $b = 0$ und $a = 0$, ergibt; hier ist damit $(a, b) = (0, 0)$.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(a, b)	$(1, 0)$	$(-1, 0)$	$\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$	$(0, 0)$
$f(a, b)$	1	-1	-1	1	0

erkennt man, daß f in $(-1, 0)$ sowie $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ globale Minimalstellen sowie in $(1, 0)$ sowie $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ globale Maximalstellen besitzt.

8. a) Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left|\frac{xy}{|x| + |y|} - 0\right| = \frac{|x| \cdot |y|}{|x| + |y|} =$$

$$= \underbrace{\frac{|x|}{|x| + |y|}}_{\leq 1} \cdot |y| \leq |y| \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad (x, y) \to (0, 0);$$

damit gilt insbesondere

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0),$$

weswegen f stetig in $(0, 0)$ ist.

b) Wir betrachten zuerst die partielle Differenzierbarkeit von f in x–Richtung und treffen hierfür die folgende Fallunterscheidung:

- Die Betragsfunktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = |t|$, ist für alle $t \neq 0$ differenzierbar mit $h'(t) = \operatorname{sign}(t)$. Damit existiert die partielle Ableitung $\partial_x f(x,y)$ zumindest in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$ mit

$$\partial_x f(x,y) = \frac{(|x|+|y|)\cdot y - xy \cdot \operatorname{sign}(x)}{(|x|+|y|)^2} = \\ = \frac{|x|y + |y|y - |x|y}{(|x|+|y|)^2} = \frac{|y|y}{(|x|+|y|)^2}.$$

- In den Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x = 0$ gilt für alle $h \neq 0$

$$\frac{f(0+h,y) - f(0,y)}{h} = \frac{1}{h}\cdot f(h,y) = \frac{1}{h}\cdot\frac{hy}{|h|+|y|} = \frac{y}{|h|+|y|},$$

  so daß sich

$$\partial_x f(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,y) - f(0,y)}{h} = \\ = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{y}{|h|+y} = \dfrac{y}{0+y} = 1, & \text{für } y > 0, \\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{y}{|h|+y} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0, & \text{für } y = 0, \\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{y}{|h|-y} = \dfrac{y}{0-y} = -1, & \text{für } y < 0, \end{cases}$$

  zusammenfassend also

$$\partial_x f(0,y) = \operatorname{sign}(y)$$

  ergibt.

Damit ist f in x–Richtung partiell differenzierbar mit

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|y}{(|x|+|y|)^2}, & \text{für } x \neq 0, \\ \operatorname{sign}(y), & \text{für } x = 0; \end{cases}$$

aus Symmetriegründen ist dann f auch in y–Richtung partiell differenzierbar mit

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|x}{(|x|+|y|)^2}, & \text{für } y \neq 0, \\ \operatorname{sign}(x), & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

Insgesamt ist f partiell differenzierbar mit

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (\partial_x f(x,y),\ \partial_y f(x,y))$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Wir betrachten das Verhalten der partiellen Ableitung $\partial_x f$ der Funktion f in x–Richtung auf der y–Achse $x = 0$ und erhalten für alle $t > 0$

$$\partial_x f(0,t) = \operatorname{sign}(t) \underset{t>0}{=} 1$$

und damit

$$\lim_{t \to 0+} \partial_x f(0,t) = 1 \neq 0 = \partial_x f(0,0);$$

damit ist $\partial_x f$ an der Stelle $(0,0)$ unstetig. Folglich ist f in $(0,0)$ auch nicht stetig partiell differenzierbar.