MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 1
14.10.2014

# Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1\, e^{-x_2},$$

ist als Produkt und Verkettung von Monomfunktionen sowie der Exponentialfunktion selbst stetig; genauer gilt: die beiden Monomfunktionen

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x_1, x_2) = x_1, \quad \text{und} \quad f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x_1, x_2) = -x_2,$$

sind stetig, und wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion ist auch die Verknüpfung

$$f_3 = \exp \circ f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_3(x_1, x_2) = e^{-x_2},$$

und damit schießlich das Produkt

$$f = f_1 \cdot f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1\, e^{-x_2},$$

stetig.

b) Die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \left| \sqrt{x_1^2 + 3} - x_2 \right|,$$

ist als Verknüpfung und Differenz von Monomfunktionen sowie der Wurzelfunktion und des Absolutbetrags selbst stetig; genauer gilt: die beiden Polynomfunktionen

$$g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 3, \quad \text{und} \quad g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g_2(x_1, x_2) = x_2,$$

sind stetig, und wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion $g_3 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $g_3(t) = \sqrt{t}$, ist auch die Verknüpfung

$$g_4 = g_3 \circ g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g_4(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + 3},$$

sowie die Differenz

$$g_5 = g_4 - g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g_5(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + 3} - x_2,$$

stetig, woraus sich wegen der Stetigkeit der Betragsfunktion $g_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_6(t) = |t|$, ergibt, daß auch die Verknüpfung

$$g = g_6 \circ g_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \left| \sqrt{x_1^2 + 3} - x_2 \right|,$$

stetig ist.

c) Die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0), \end{cases}$$

ist an allen Stellen $a \neq (0,0)$ als Quotient und Verkettung von Polynomfunktionen sowie der Wurzelfunktion selbst stetig. Wegen

$$\lim_{t \to 0+} h(t, 0) = \lim_{t \to 0+} \frac{t - 0}{\sqrt{t^2 + 0^2}} = \lim_{t \to 0+} \frac{t}{|t|} \underset{t > 0}{=} \lim_{t \to 0+} 1 = 1 \neq h(0,0)$$

ist $h$ an der Stelle $a = (0,0)$ unstetig.

d) Die Funktion

$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad k(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

ist zunächst an allen Stellen $a \neq (0,0)$ als Quotient und Verkettung von Polynomfunktionen sowie der Wurzelfunktion selbst stetig. Darüber hinaus gilt für alle $x = (x_1, x_2) \neq (0,0)$

$$|k(x_1, x_2) - k(0,0)| = \frac{|x_1^2 - x_2^2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \leq \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \sqrt{\underbrace{x_1^2}_{\to 0} + \underbrace{x_2^2}_{\to 0}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

und damit insbesondere $k(x) \to 0$ für $x \to 0$; also ist $k$ auch an der Stelle $a = (0,0)$ stetig.

2. Die Definitionsmenge

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \leq x \leq \pi \text{ und } 0 \leq y \leq \pi \right\} = [-\pi; \pi] \times [0; \pi]$$

ist das abgeschlossene Rechteck mit den Eckpunkten $(-\pi; 0)$, $(\pi; 0)$, $(\pi, \pi)$ und $(-\pi, \pi)$; insbesondere ist $D$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Damit besitzt die (als Summe zweier trigonometrischer Funktionen insbesondere) stetige Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \cos x + \sin y,$$

nach dem Satz von Weierstraß mindestens ein globales Minimum und mindestens ein globales Maximum, es gibt also $(a, b)$ und $(c, d) \in D$ mit

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d)$$

für alle $(x,y) \in D$. Wegen

$$f(x,y) = \cos x + \sin y \leq 1 + 1 = 2$$

mit

$$f(x,y) = 2 \iff \cos x = 1 \;\text{ und }\; \sin y = 1 \iff x = 0 \;\text{ und }\; y = \frac{\pi}{2}$$

sowie

$$f(x,y) = \cos x + \sin y \geq -1 + 0 = -1$$

mit

$$f(x,y) = -1 \iff \cos x = -1 \;\text{ und }\; \sin y = 0 \iff$$
$$\iff x \in \{-\pi, \pi\} \;\text{ und }\; y \in \{0, \pi\}$$

für alle $(x,y) \in D$ besitzt $f$ in Eckpunkten $(-\pi; 0)$, $(\pi; 0)$, $(\pi, \pi)$ und $(-\pi, \pi)$ von $D$ globale Minimalstellen sowie im Mittelpunkt $(0, \frac{\pi}{2})$ eine globale Maximalstelle.

3. Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x - y^2,$$

ist (als Polynomfunktion) stetig.

a) Die Einheitskreislinie

$$D_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\big\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kompakt, und nach dem Satz von Weierstraß nimmt $f$ auf $D_1$ ein Minimum $(a,b) \in D_1$ und ein Maximum $(c,d) \in D_1$ an, es gilt also

$$f(a,b) \leq f(x,y) \leq f(c,d) \qquad \text{für alle} \quad (x,y) \in D_1.$$

Mit Hilfe der Polarkoordinaten $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ erhalten wir

$$f(x,y) = x - y^2 = \cos\varphi - \sin^2\varphi.$$

Die stetige und differenzierbare Hilfsfunktion

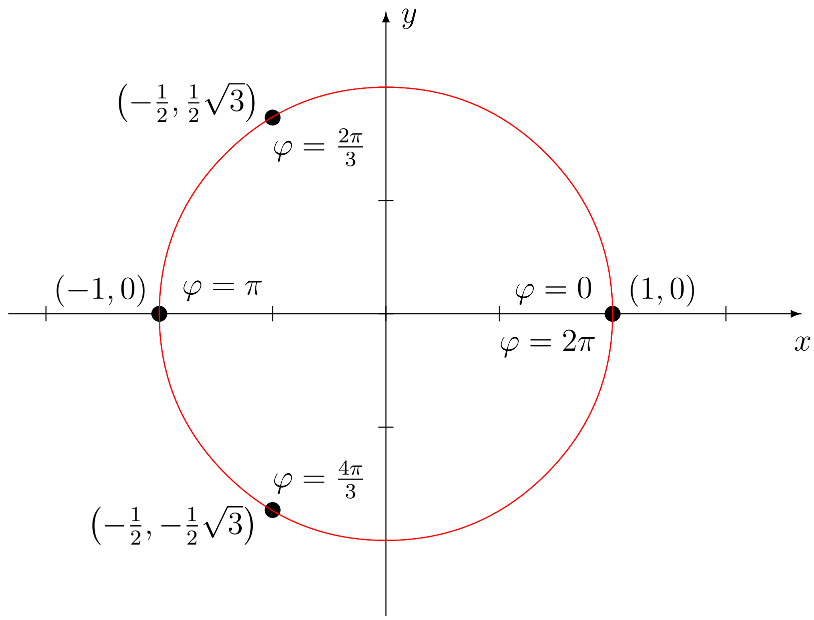
$$h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = \cos\varphi - \sin^2\varphi,$$

mit

$$h'(\varphi) = -\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi = -\sin\varphi\,(1 + 2\cos\varphi) \quad \text{für alle} \;\; \varphi \in [0, 2\pi]$$

besitzt globale Extrema, wofür nur die Randpunkte $0$ und $2\pi$ des Definitionsintervalls $[0, 2\pi]$ sowie die Nullstellen der Ableitung $h'$ in Frage kommen; dabei ist

$$h'(\varphi) = 0 \iff -\sin\varphi \cdot (1 + 2\cos\varphi) = 0 \iff$$
$$\iff \sin\varphi = 0 \;\text{ oder }\; \cos\varphi = -\frac{1}{2} \iff \varphi \in \left\{0,\ \frac{2\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4\pi}{3},\ 2\pi\right\}.$$



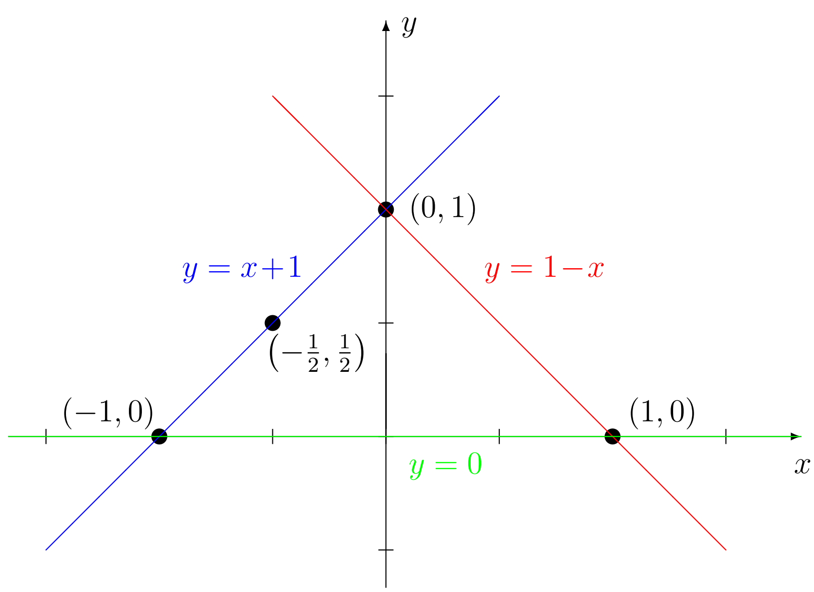

Die Wertetabelle

| $\varphi$ | $0$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(\varphi)$ | $1$ | $-\frac{5}{4}$ | $-1$ | $-\frac{5}{4}$ | $1$ |

zeigt, daß $f$ in den Punkten $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ das globale Minimum $-\frac{5}{4}$ sowie in $(1, 0)$ das globale Maximum 1 annimmt; da $D_1$ überdies zusammenhängend ist, gilt $W_1 = \left[-\frac{5}{4}, 1\right]$.

b) Das Dreieck $D_2 \in \mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $(-1, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ ist kompakt, und nach dem Satz von Weierstraß nimmt $f$ auf $D_2$ ein Minimum $(a, b) \in D_1$ und ein Maximum $(c, d) \in D_1$ an, es gilt also

$$f(a, b) \le f(x, y) \le f(c, d) \qquad \text{für alle} \quad (x, y) \in D_2.$$



Wir betrachten die drei Dreiecksseiten von $D_2$:

- Für die Punkte der linken Kathete gilt $(t, t+1)$ mit $t \in [-1, 0]$, also

$$f(t, t+1) = t - (t+1)^2 = -t^2 - t - 1 = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4};$$

  als Extrema kommen also $(-1, 0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ und $(0, 1)$ in Frage.

- Für die Punkte der rechten Kathete gilt $(t, 1-t)$ mit $t \in [0, 1]$, also

$$f(t, 1-t) = t - (1-t)^2 = -t^2 + 3t - 1 = -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4};$$

  als Extrema kommen also $(0, 1)$ und $(1, 0)$ in Frage.

- Für die Punkte der Hypotenuse gilt $(t, 0)$ mit $t \in [-1, 1]$, also

$$f(t, 0) = t - 0^2 = t;$$

  als Extrema kommen also $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ in Frage.

Die Wertetabelle

| $(x, y)$ | $(-1, 0)$ | $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ | $(0, 1)$ | $(1, 0)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x, y)$ | $-1$ | $-\frac{3}{4}$ | $-1$ | $1$ |

zeigt, daß $f$ in den Punkten $(-1, 0)$ und $(0, 1)$ das globale Minimum $-1$ sowie im Punkt $(1, 0)$ das globale Maximum $1$ annimmt; da $D_2$ überdies zusammenhängend ist, gilt $W_1 = [-1, 1]$.

4. Wir betrachten eine Kurve $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, mit

$$W_\varphi \subseteq [-1, 1] \times [-1, 1] \quad \text{sowie} \quad \varphi(-1) = (-1, -1) \quad \text{und} \quad \varphi(1) = (1, 1);$$

damit liegt die Bildmenge $W_\varphi$ von $\varphi$ im abgeschlossenen Quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$ mit den Eckpunkten $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ und verbindet dabei die beiden gegenüberliegenden Ecken $\varphi(-1) = (-1, -1)$ und $\varphi(1) = (1, 1)$.

Aus der Stetigkeit der gegebenen Funktion $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ und der Kurve $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ ergibt sich nun die Stetigkeit ihrer Verknüpfung

$$h = f \circ \varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad h(t) = f(\varphi(t));$$

wegen

$$h(-1) = f(\varphi(-1)) = f(-1, -1) = -1 < 0$$

und

$$h(1) = f(\varphi(1)) = f(1, 1) = 1 > 0$$

existiert damit nach dem Nullstellensatz ein $\xi \in \left]-1, 1\right[$ mit $h(\xi) = 0$. Folglich ist aber $p = \varphi(\xi)$ ein Punkt in der Bildmenge $W_\varphi$ der Kurve $\varphi$, insbesondere also im abgeschlossenen Quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$, mit

$$f(p) = f(\varphi(\xi)) = h(\xi) = 0.$$

Um die Existenz von unendlich vielen Nullstellen der Funktion $f$ nachzuweisen, konstruieren wir nun im folgenden geeignete Kurven; sei dazu $a \in \,]-1,1[$ ein reeller Parameter. Die Kurve

$$\varphi_a : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_a(t) = \begin{cases} (t, (1+a)\,t + a)\,, & \text{für } -1 \leq t \leq 0, \\ (t, (1-a)\,t + a)\,, & \text{für } 0 < t \leq 1, \end{cases}$$

beschreibt den Streckenzug $P_a$ zwischen den drei Punkten $\varphi_a(-1) = (-1,-1)$, $\varphi_a(0) = (0,a)$ und $\varphi_a(1) = (1,1)$; damit besitzt $f$ auf $P_a$ eine im Innern des Quadrats liegende Nullstelle $p_a$. Nachdem aber zwei Streckenzüge $P_a$ und $P_{a'}$ für $a \neq a'$ nur die beiden Eckpunkte $(-1,-1)$ und $(1,1)$ gemeinsam haben, ergibt sich $p_a \neq p_{a'}$; folglich besitzt die Funktion $f$ aber unendliche viele Nullstellen.