MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Klausur
24.01.2015

Klausur zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 + 3\,x^2\,y + 3\,x\,y^2 - 3\,x + 1,$$

ist als Polynomfunktion beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt zum einen

$$\partial_x f(x,y) = 3\,x^2 + 6\,x\,y + 3\,y^2 - 3 \quad \text{und} \quad \partial_y f(x,y) = 3\,x^2 + 6\,x\,y,$$

also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(3\,x^2 + 6\,x\,y + 3\,y^2 - 3,\ 3\,x^2 + 6\,x\,y\right),$$

und zum anderen

$$\partial_x\partial_x f(x,y) = 6\,x + 6\,y \quad \text{und} \quad \partial_y\partial_y f(x,y) = 6\,x$$

sowie

$$\partial_x\partial_y f(x,y) = 6\,x + 6\,y = \partial_y\partial_x f(x,y),$$

also

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6\,x + 6\,y & 6\,x + 6\,y \\ 6\,x + 6\,y & 6\,x \end{pmatrix}.$$

b) Die kritischen Punkte von f sind genau die Nullstellen von $\operatorname{grad} f$: es ist

$$\partial_x f(x,y) = 0 \iff \underbrace{3\,x^2 + 6\,x\,y}_{=\partial_y f(x,y)} + 3\,y^2 - 3 = 0 \underset{\partial_y f(x,y)=0}{\iff}$$

$$\iff 3\,y^2 - 3 = 0 \iff y^2 = 1 \iff y \in \{-1, 1\};$$

für $y = -1$ ergibt sich

$$\partial_y f(x,y) = 0 \iff 3\,x^2 - 6\,x = 0 \iff 3\,x(x-2) = 0 \iff y \in \{0, 2\},$$

und im Falle $y = 1$ ergibt sich

$$\partial_y f(x,y) = 0 \iff 3\,x^2 + 6\,x = 0 \iff 3\,x(x+2) = 0 \iff y \in \{-2, 0\}.$$

Folglich besitzt f genau die vier kritischen Punkte $(0,-1)$ und $(2,-1)$ sowie $(-2,1)$ und $(0,1)$.

c) Als lokale Extremstellen und Sattelpunkte der auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten und partiell differenzierbaren Funktion f kommen lediglich ihre in b) ermittelten kritschen Punkte in Frage:

- Für
$$H_1 = \operatorname{Hess} f(0,-1) = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$
gilt $\det H_1 = -36 < 0$; damit ist H_1 indefinit, und f besitzt in $(0,-1)$ einen Sattelpunkt.
- Für
$$H_2 = \operatorname{Hess} f(2,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$
gilt $\det H_2 = 36 > 0$ und $\operatorname{Spur} H_2 = 18 > 0$; damit ist H_2 positiv definit, und f besitzt in $(2,-1)$ ein lokales Minimum.
- Für
$$H_3 = \operatorname{Hess} f(-2,1) = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$
gilt $\det H_3 = 36 > 0$ und $\operatorname{Spur} H_3 = -18 < 0$; damit ist H_3 negativ definit, und f besitzt in $(2,-1)$ ein lokales Maximum.
- Für
$$H_4 = \operatorname{Hess} f(0,1) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$
gilt $\det H_4 = -36 < 0$; damit ist H_4 indefinit, und f besitzt in $(0,1)$ einen Sattelpunkt.

2. a) Die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung
$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + 2\,y' + y = 0$$
mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom
$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$$
mit der doppelten Nullstelle $\lambda = -1$; damit bilden die beiden Funktionen
$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = e^{-x}, \qquad \text{und} \qquad \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_2(x) = x\,e^{-x},$$
ein Fundamentalsystem von (D_0). Die gegebene inhomogene lineare Differentialgleichung
$$(\mathrm{D}) \qquad y'' + 2\,y' + y = 4\,e^{-3x}$$
besitzt die rechte Seite
$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = 4\,e^{-3x},$$
der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}$ mit der konstanten Funktion $p(x) = 4$ und $a = -3$. Wegen $\chi(a) \neq 0$ wählen wir für die partikuläre Lösung φ_p von (D) den Ansatz
$$\varphi_p(x) = q(x)\,e^{-3x} = r\,e^{-3x}$$

ebenfalls mit einer konstanten Funktion $q(x) = r$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = -3\,r\,e^{-3x} \qquad \text{und} \qquad \varphi_p''(x) = 9\,r\,e^{-3x}$$

ist φ_p genau dann Lösung von (D), wenn

$$9\,r\,e^{-3x} + 2\left(-3\,r\,e^{-3x}\right) + r\,e^{-3x} = 4\,e^{-3x}, \quad \text{also} \quad 4\,r\,e^{-3x} = 4\,e^{-3x},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $r = 1$ und folglich $\varphi_p(x) = e^{-3x}$. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\,e^{-x} + c_2\,x\,e^{-x} + e^{-3x},$$

mit $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D).

b) Es handelt sich um die autonome Differentialgleichung $y' = g(y)$ mit der stetigen Funktion

$$g : \,]0,1[\, \to \mathbb{R}, \quad g(y) = \frac{y}{2\ln y}.$$

Wegen $g(y) \neq 0$ für alle $0 < y < 1$ erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int 1\,dx \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{2\ln y}{y}\,dy = \int 1\,dx, \quad \text{also} \quad (\ln y)^2 = x + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wegen

$$y(0) = e^{-1} \iff \left(\ln e^{-1}\right)^2 = 0 + c \iff (-1)^2 = c \iff c = 1$$

ist also $(\ln y)^2 = x + 1$, woraus sich wegen $\ln y < 0$ schließlich

$$\ln y = -\sqrt{x+1} \quad \text{bzw.} \quad y = e^{-\sqrt{x+1}}$$

ergibt. Wegen $\ln y < 0$ enthält das maximale Lösungsintervall alle $x \in \mathbb{R}$, für die der Radikand positiv ist; wegen $x + 1 > 0 \iff x > -1$ ist also

$$\varphi : \,]-1,\infty[\, \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = e^{-\sqrt{x+1}},$$

die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

3. Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5\,x^2 - 6\,x\,y + 5\,y^2 - 26\,x + 22\,y + 21 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -26 \\ 22 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 21 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - (-3)^2 = (2-\lambda)(8-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 8$; wegen

$$A - \lambda_1 \, E_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_2 \, E_2 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 8$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^\top A P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -26 & 22 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 21 = 0,$$

und damit

$$2\,u^2 + 8\,v^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}\,u + \frac{48}{\sqrt{2}}\,v + 21 = 0.$$

Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$2\left(u^2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot u + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + 8\left(v^2 + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot v + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2\right) =$$

$$= -21 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

also

$$2\left(u - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8\left(v + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = -21 + 1 + 36 = 16,$$

so daß sich mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ v + \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ dann

$$2\,w^2 + 8\,z^2 = 16, \qquad \text{also} \qquad \frac{w^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} = 1,$$

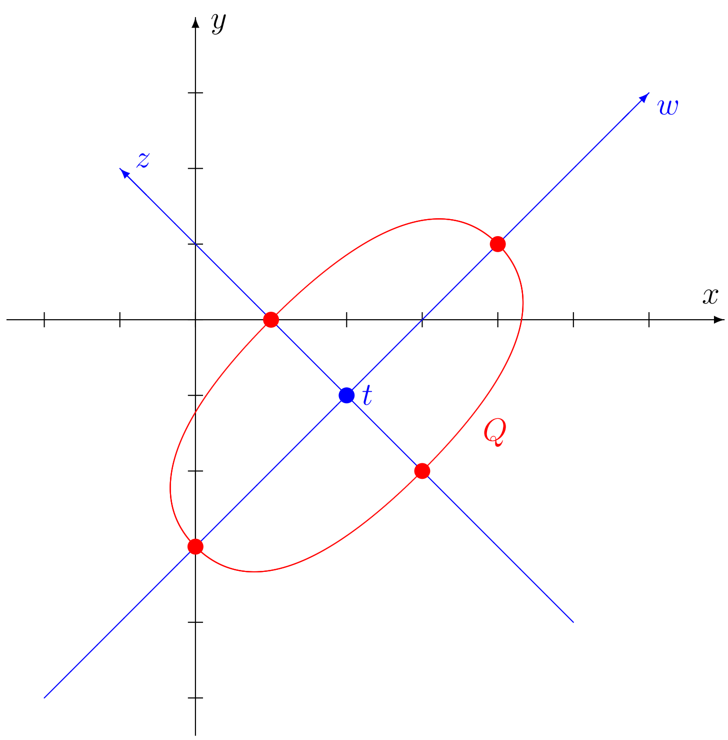
die euklidische (metrische) Normalform einer Ellipse ergibt. Insgesamt ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ z - \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$
$$= P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=t};$$

damit besitzt Q die beiden Hauptachsen

$$t + \mathbb{R} \cdot \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad (w\text{–Achse}) \qquad \text{und} \qquad t + \mathbb{R} \cdot \frac{v_2}{\|v_2\|} \quad (z\text{–Achse}),$$

und wir erhalten im x–y–Koordinatensystem die folgende Skizze:



4. a) Für die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

gilt:

- Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \neq (0,0)$ ergibt sich

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$= \sqrt{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{also} \qquad f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} f(0,0);$$

damit ist f an der Stelle $(0,0)$ stetig.

- Für alle $h \neq 0$ ergibt sich

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{h^2}{\sqrt{h^2+0^2}} - 0\right) = \frac{1}{h} \cdot \frac{h^2}{|h|} = \frac{h}{|h|} = \operatorname{sign}(h);$$

wegen

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0-} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = -1$$

ist f an der Stelle $(0,0)$ nicht partiell differenzierbar in x–Richtung.

- Für alle $h \neq 0$ ergibt sich

$$\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{0^2}{\sqrt{0^2+h^2}} - 0\right) = \frac{1}{h} \cdot 0 = 0 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0;$$

damit ist f an der Stelle $(0,0)$ partiell differenzierbar in y–Richtung.

b) Wir bestimmen die affinen Normalformen der beiden Quadriken Q_1 und Q_2 mit Hilfe geeigneter quadratischer Ergänzungen: Wegen

$$x^2+4\,x\,y-5\,y^2 = 1 \iff (x+2y)^2-9y^2 = 1 \iff (x+2y)^2-(3y)^2 = 1$$

erhält man mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2\,y \\ 3\,y \end{pmatrix} = M_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

die affine Normalform $w^2 - z^2 = 1$ einer Hyperbel. Wegen

$$x^2+6\,x\,y+5\,y^2 = 1 \iff (x+3y)^2-4y^2 = 1 \iff (x+3y)^2-(2y)^2 = 1$$

erhält man mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3\,y \\ 2\,y \end{pmatrix} = M_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

die affine Normalform $w^2-z^2 = 1$ einer Hyperbel. Damit sind Q_1 und Q_2 zu ihrer gemeinsamen Normalform $H : w^2-z^2 = 1$ und folglich auch zueinander affin äquivalent. Dabei bildet die Affinität

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

die Hyperbel Q_1 auf die Hyperbel H in Normalform ab, und die Affinität

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

bildet die Hyperbel Q_2 auf die Hyperbel H in Normalform ab; insgesamt ist dann die Hintereinanderausführung

$$f = f_2^{-1} \circ f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_2^{-1} \cdot M_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

eine Affinität, die die Hyperbel Q_1 auf die Hyperbel Q_2 abbildet; dabei ist

$$\begin{aligned} M_2^{-1} \cdot M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$