MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Klausur
24.01.2015

Klausur zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

1. Gegeben sei die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + 3\,x^2\,y + 3\,x\,y^2 - 3\,x + 1.$$
   a) Man begründe, daß f zweimal stetig partiell differenzierbar ist, und bestimme $\operatorname{grad} f(x, y)$ und $\operatorname{Hess} f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (2)
   b) Man zeige, daß f genau vier kritische Punkte besitzt. (2)
   c) Man untersuche f auf lokale Extremstellen und Sattelpunkte. (2)

2. a) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y'' + 2\,y' + y = 4\,e^{-3x}.$$ (3)
   b) Man bestimme die maximale Lösung des Anfangswertproblems
$$y' = \frac{y}{2\ln y} \qquad \text{für} \quad 0 < y < 1 \quad \text{mit} \quad y(0) = e^{-1}$$
   unter Angabe ihres Definitionsintervalls. (3)

3. In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ ist die Quadrik
$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5\,x^2 - 6\,x\,y + 5\,y^2 - 26\,x + 22\,y + 21 = 0 \right\}$$
gegeben. Man zeige, daß Q eine Ellipse mit der metrischen Normalform
$$\frac{w^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$
ist, und skizziere Q im x–y–Koordinatensystem. (6)

4. a) Man untersuche die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
   an der Stelle $(0, 0)$ auf Stetigkeit sowie auf partielle Differenzierbarkeit in x–Richtung und in y–Richtung. (3)
   b) Man zeige, daß die beiden Quadriken
$$Q_1 \;:\; x^2 + 4\,x\,y - 5\,y^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad Q_2 \;:\; x^2 + 6\,x\,y + 5\,y^2 = 1$$
   affin äquivalent sind, und gebe eine Affinität $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(Q_1) = Q_2$ an. (3)