Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Bearbeitungsvorschlag —

49. Die ebene Quadrik

$$Q_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 + 4xy + 2y^2 - 1 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{mit} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det(A_1 - \lambda\, E) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \\ &= \left(\lambda^2 - 7\lambda + 10\right) - 4 = \lambda^2 - 7\,\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A_1 die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 6$; wegen

$$A_1 - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$A_1 - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A_1 zum Eigenwert $\lambda_2 = 6$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P_1 = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ergibt sich $P_1^\top A_1 P_1 = D_1$, so daß die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P_1^\top A_1 P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot D_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1,$$

also

$$1 \cdot w^2 + 6 \cdot z^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

überführt; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform einer Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten 1 und $\frac{1}{\sqrt{6}}$ dar. Die ebene Quadrik

$$Q_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 6xy + 11y^2 - 2 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{mit} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det(A_2 - \mu\, E) &= \begin{vmatrix} 3-\mu & 3 \\ 3 & 11-\mu \end{vmatrix} = (3-\mu)(11-\mu) - 9 = \\ &= \left(\mu^2 - 14\mu + 33\right) - 9 = \mu^2 - 14\,\mu + 24 = (\mu - 2)\,(\mu - 12) \end{aligned}$$

für alle $\mu \in \mathbb{R}$ besitzt A_2 die beiden Eigenwerte $\mu_1 = 2$ und $\mu_2 = 12$; wegen

$$A_2 - \mu_1 E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A_2 zum Eigenwert $\mu_1 = 2$, und wegen

$$A_2 - \mu_2 E = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A_2 zum Eigenwert $\mu_2 = 12$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P_2 = \left(\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|} \right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D_2 = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ergibt sich $P_2^\top A_2 P_2 = D_2$, so daß die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P_2^\top A_2 P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot D_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 2,$$

also

$$2 \cdot w^2 + 12 \cdot z^2 = 2 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

überführt; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform einer Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten 1 und $\frac{1}{\sqrt{6}}$ dar.

Da nun die beiden Quadriken Q_1 und Q_2 dieselbe euklidische (metrische) Normalform

$$E \quad : \quad \frac{w^2}{1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

besitzen, sind sie euklidisch (metrisch) äquivalent; dabei wird die Ellipse E in euklidischer (metrischer) Normalform nach obiger Rechnung durch die orthogonale Abbildung

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

auf die Ellipse Q_1 sowie durch die orthogonale Abbildung

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

auf die Ellipse Q_2 abgebildet; folglich bildet aber die orthogonale Abbildung

$$f = f_2 \circ f_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_2 \cdot P_1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} P_2 \cdot P_1^{-1} = P_2 \cdot P_1^\top = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &= \\ = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Ellipse Q_1 auf die Ellipse Q_2 ab.

50. a) Wir bestimmen die affinen Normalformen der beiden Quadriken

$$\begin{aligned} Q_1 &: \quad 3\,x^2 + 2\,x\,y + 2\,y^2 = 1, \\ Q_2 &: \quad 3\,x^2 + 2\,x\,y + 3\,y^2 = 1 \end{aligned}$$

mit Hilfe quadratischer Ergänzung. Wegen

$$3\,x^2 + 2\,x\,y + 2\,y^2 = 1 \iff 3\left(x^2 + \frac{2}{3}\,x\,y\right) + 2\,y^2 = 1 \iff$$

$$\iff 3\left(x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{y}{3} + \left(\frac{y}{3}\right)^2\right) - 3\cdot\left(\frac{y}{3}\right)^2 + 2\,y^2 = 1 \iff$$

$$\iff 3\left(x + \frac{y}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}\,y^2 = 1 \iff \left(\sqrt{3}\,x + \frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\,y\right)^2 = 1$$

erhält man mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\,x & \frac{1}{\sqrt{3}}\,y \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\,y \end{pmatrix} = A_1\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

die affine Normalform $w^2 + z^2 = 1$; damit ist Q_1 eine Ellipse. Wegen

$$3\,x^2 + 2\,x\,y + 3\,y^2 = 1 \iff 3\left(x^2 + \frac{2}{3}\,x\,y\right) + 3\,y^2 = 1 \iff$$

$$\iff 3\left(x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{y}{3} + \left(\frac{y}{3}\right)^2\right) - 3\cdot\left(\frac{y}{3}\right)^2 + 3\,y^2 = 1 \iff$$

$$\iff 3\left(x + \frac{y}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}\,y^2 = 1 \iff \left(\sqrt{3}\,x + \frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}\,y\right)^2 = 1$$

erhält man mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\,x & \frac{1}{\sqrt{3}}\,y \\ 0 & \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}\,y \end{pmatrix} = A_2\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

die affine Normalform $w^2 + z^2 = 1$; damit ist Q_2 eine Ellipse. Insbesondere sind Q_1 und Q_2 zum Einheitskreis K und damit zueinander affin äquivalent.

b) Gemäß a) bildet zunächst die Affinität

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_1\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

die Ellipse Q_1 auf den Einheitskreis K ab, und die Affinität

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_2\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = A_2^{-1}\cdot\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix},$$

bildet dann den Einheitskreis K auf die Ellipse Q_2 ab.
Insgesamt ist dann die Hintereinanderausführung

$$f = f_2 \circ f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_2^{-1}\cdot A_1\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

eine Affinität (sogar eine bijektive lineare Abbildung), die die Ellipse Q_1 auf die Ellipse Q_2 abbildet; dabei ist

$$A_2^{-1} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \sqrt{8} & \frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{3} \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

51. a) Die ebene Quadrik

$$Q_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4\,x\,y + 6\,y^2 = 1 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{mit} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$\det(A_1 - \lambda\,E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\,\lambda + 2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A_1 die beiden Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2} > 0;$$

damit gibt es eine orthogonale Matrix $P_1 \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit

$$P_1^\top A_1 P_1 = D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

wobei in den Spalten von P_1 normierte Eigenvektoren der Matrix A_1 zu den beiden Eigenwerten λ_1 und λ_2 stehen. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P_1^\top A_1 P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot D_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1,$$

also

$$\lambda_1\,w^2 + \lambda_2\,z^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = 1$$

über; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform dar. Damit ist Q_1 eine Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-\sqrt{41}}} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7+\sqrt{41}}}.$$

Die ebene Quadrik

$$Q_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 6\,x\,y + 12\,y^2 = 1 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{mit} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$\det(A_2 - \mu\,E) = \begin{vmatrix} 1-\mu & 3 \\ 3 & 12-\mu \end{vmatrix} = (1-\mu)(12-\mu) - 9 = \mu^2 - 13\,\mu + 3$$

für alle $\mu \in \mathbb{R}$ besitzt A_2 die beiden Eigenwerte

$$\mu_{1,2} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4\cdot 3}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{157}}{2} > 0;$$

damit gibt es eine orthogonale Matrix $P_2 \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit

$$P_2^\top A_2 P_2 = D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix},$$

wobei in den Spalten von P_2 normierte Eigenvektoren der Matrix A_2 zu den beiden Eigenwerten μ_1 und μ_2 stehen. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P_2^\top A_2 P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot D_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1,$$

also

$$\mu_1\,w^2 + \mu_2\,z^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2}}\right)^2} = 1$$

über; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform dar. Damit ist Q_2 eine Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13-\sqrt{157}}} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13+\sqrt{157}}}.$$

Insgesamt erhält man also das folgende Ergebnis:

- Die ebenen Quadriken Q_1 und Q_2 sind zwei Ellipsen und damit jeweils zum Einheitskreis und folglich auch zueinander affin äquivalent.
- Die beiden Ellipsen Q_1 und Q_2 sind aber nur dann auch euklidisch (metrisch) äquivalent, wenn sie dieselben Hauptachsenlängen besitzen; dies ist hier genau dann der Fall, wenn die beiden kleineren Eigenwerte λ_1 und μ_1 und die beiden größeren Eigenwerte λ_2 und μ_2 der beiden Matrizen A_1 und A_2 übereinstimmen. Wegen $\lambda_1 \neq \mu_1$ und $\lambda_2 \neq \mu_2$ sind nun Q_1 und Q_2 nicht metrisch äquivalent.

b) Wir bestimmen die affinen Normalformen der beiden Quadriken Q_1 und Q_2 mit Hilfe geeigneter quadratischer Ergänzungen: Wegen

$$x^2+4xy+6y^2 = 1 \iff (x+2y)^2+2y^2 = 1 \iff (x+2y)^2+(\sqrt{2}y)^2 = 1$$

erhält man mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2\,y \\ \sqrt{2}\,y \end{pmatrix} = T_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

die affine Normalform $w^2 + z^2 = 1$ der Ellipse Q_1; damit bildet aber die Affinität

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

die Ellipse Q_1 auf den Einheitskreis K ab. Wegen

$$x^2+6xy+12y^2 = 1 \iff (x+3y)^2+3y^2 = 1 \iff (x+3y)^2+(\sqrt{3}y)^2 = 1$$

erhält man mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3\,y \\ \sqrt{3}\,y \end{pmatrix} = T_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

die affine Normalform $w^2 + z^2 = 1$ der Ellipse Q_2; damit bildet aber die Affinität

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

die Ellipse Q_2 auf den Einheitskreis K ab. Insgesamt ist dann die Hintereinanderausführung

$$f = f_2^{-1} \circ f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_2^{-1} \cdot T_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

eine Affinität die die Ellipse Q_1 auf die Ellipse Q_2 abbildet; dabei ist

$$T_2^{-1} \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 - \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

52. a) Wir bestimmen die affinen Normalformen der beiden Kegelschnitte

$$\begin{aligned} Q_1 &: \quad (*) \quad 2\,x^2 + 4\,x\,y + 3\,y^2 + 2\,y = 1 \\ Q_2 &: \quad (\star) \quad 3\,x^2 - 2\,\alpha\,x\,y + \alpha\,y^2 = 1 \end{aligned}$$

mit Hilfe geeigneter quadratischer Ergänzungen:

- Für den Kegelschnitt Q_1 erhält man wegen

$$\begin{aligned} (*) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2\left(x^2 + 2\,x\,y + y^2\right) + \left(y^2 + 2\,y\right) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\,(x+y)^2 + \left(y^2 + 2\,y + 1\right) = 1 + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\,(x+y)^2 + (y+1)^2 = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x+y)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,(y+1)\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

  mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,(y+1) \end{pmatrix}$$

  die affine Normalform $w^2 + z^2 = 1$ einer Ellipse.

- Für den Kegelschnitt Q_2 erhält man wegen

$$\begin{aligned} (\star) \quad &\Longleftrightarrow \quad 3\left(x^2 - 2\,x\left(\frac{\alpha}{3}\,y\right) + \left(\frac{\alpha}{3}\,y\right)^2\right) + \alpha\,y^2 - 3\left(\frac{\alpha}{3}\,y\right)^2 = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 3\left(x - \frac{\alpha}{3}\,y\right)^2 + \frac{3\,\alpha - \alpha^2}{3}\,y^2 = 1 \end{aligned}$$

  - im Falle $3\,\alpha - \alpha^2 > 0$ mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\left(x - \frac{\alpha}{3}\,y\right) \\ \sqrt{\frac{3\,\alpha - \alpha^2}{3}}\,y \end{pmatrix}$$

    die affine Normalform $w^2 + z^2 = 1$ einer Ellipse,

  - im Falle $3\,\alpha - \alpha^2 = 0$ mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\left(x - \frac{\alpha}{3}\,y\right) \\ y \end{pmatrix}$$

    die affine Normalform $w^2 = 1$ eines parallelen Geradenpaares und

  - im Falle $3\,\alpha - \alpha^2 < 0$ mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\left(x - \frac{\alpha}{3}\,y\right) \\ \sqrt{\frac{\alpha^2 - 3\,\alpha}{3}}\,y \end{pmatrix}$$

    die affine Normalform $w^2 - z^2 = 1$ einer Hyperbel.

Damit sind die beiden Kegelschnitte Q_1 und Q_2 genau dann affin äquivalent, wenn mit Q_1 auch Q_2 eine Ellipse ist; dies ist genau dann der Fall, wenn $3\,\alpha - \alpha^2 > 0$ gilt, also für $\alpha \in \left]0;3\right[$.

b) Für den Fall $\alpha = 1$ sind die beiden Kegelschnitte Q_1 und Q_2 Ellipsen und damit zum Einheitskreis $K : w^2 + z^2 = 1$ affin äquivalent; gemäß den in a) ermittelten Variablentransformationen bildet die Affinität $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,(y+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

bzw. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\,(x - \frac{1}{3}\,y) \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

die Ellipse Q_1 bzw. Q_2 auf den Einheitskreis K ab. Insgesamt ist damit aber $f_2^{-1} \circ f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} \left(f_2^{-1} \circ f_1\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Affinität, die die Ellipse Q_1 (über den Einheitskreis K) auf die Ellipse Q_2 abbildet.