MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 12
12.01.2015

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Bearbeitungsvorschlag —

45. Wir bestimmen die affine Normalform für die in der Ebene mit den Koordinaten x und y durch die Gleichung

$$(*) \qquad x^2 + x\,y + 3\,x + y = 1$$

gegebenen Quadrik Q mit Hilfe quadratischer Ergänzung. Wegen

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\iff \quad \left(x^2 + x\,y + 3\,x\right) + y = 1 \\
&\iff \quad \left(x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{y}{2} + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) - \\
&\qquad\qquad - \left(\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) + y = 1 \\
&\iff \quad \left(x + \frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{y}{2} = \frac{13}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \quad \left(x + \frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(y^2 + 2 \cdot 1 \cdot y + 1^2\right) = \frac{13}{4} - \frac{1}{4} \cdot 1^2 \\
&\iff \quad \left(x + \frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\,(y+1)^2 = 3 \\
&\iff \quad \frac{1}{3}\left(x + \frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}\,(y+1)^2 = 1
\end{aligned}$$

erhält man mit $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{12}}\,(y+1) \end{pmatrix}$ die affine Normalform $u^2 - v^2 = 1$ einer Hyperbel.

46. Wir untersuchen in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ die affine Normalform der durch die Gleichung

$$(*) \qquad (s\,x_1)^2 + 2\,x_1\,x_2 + x_2^2 - 2\,x_1 - 2\,x_2 + s + 1 = 0$$

gegebenen Quadrik; dabei sind die Glieder in x_2 parameterfrei. Wegen

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\iff \quad \left(x_2^2 + 2\,x_1\,x_2 - 2\,x_2\right) + s^2\,x_1^2 - 2\,x_1 + s + 1 = 0 \\
&\iff \quad \left(x_2^2 + x_1^2 + (-1)^2 + 2\cdot x_2\cdot x_1 + 2\cdot x_2\cdot(-1) + 2\cdot x_1\cdot(-1)\right) - \\
&\qquad\quad - \left(x_1^2 + (-1)^2 + 2\cdot x_1\cdot(-1)\right) + s^2\,x_1^2 - 2\,x_1 + s + 1 = 0 \\
&\iff \quad (x_2 + x_1 - 1)^2 - x_1^2 - 1 + 2\,x_1 + s^2\,x_1^2 - 2\,x_1 + s + 1 = 0 \\
&\iff \quad (x_1 + x_2 - 1)^2 - (1 - s^2)\,x_1^2 = -s
\end{aligned}$$

erhält man mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ zunächst

$$u^2 - (1 - s^2)\,v^2 = -s.$$

Für $s = 0$ ergibt sich $u^2 - v^2 = 0$, weswegen die gegebene Quadrik in diesem Fall ein sich schneidendes Geradenpaar ist. Für $s \neq 0$ läßt sich diese Gleichung in

$$\frac{1}{-s}\cdot u^2 - \frac{1 - s^2}{-s}\cdot v^2 = 1,$$

umformen, weswegen die gegebene Quadrik in diesem Fall genau dann eine Hyperbel ist, wenn die Koeffizienten $\frac{1}{-s}$ und $\frac{1-s^2}{-s}$ von u^2 und v^2 entweder beide positiv oder beide negativ sind; dies ist jedoch zu

$$\frac{1}{-s}\cdot\frac{1 - s^2}{-s} > 0 \iff \frac{1 - s^2}{s^2} > 0 \iff 1 > s^2$$

gleichwertig. Demnach beschreibt die gegebene Gleichung genau dann eine Hyperbel, wenn $s \in \left]-1;0\right[\cup \left]0;1\right[$ ist.

47. Wir ermitteln für den in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegebenen Kegelschnitt $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Gleichung

$$(*) \qquad (1 + 4t)y^2 + x^2 + 2xy + 2tx - (8t^2 - 2t)y = -4t^3 + 1 - t^2$$

die affine Normalform (und damit den Typ) mit quadratischer Ergänzung. Es ist

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\iff \quad x^2 + 2xy + 2tx + (1 + 4t)y^2 - (8t^2 - 2t)y = -4t^3 + 1 - t^2 \\
&\iff \quad \left(x^2 + 2\cdot x\cdot y + 2\cdot x\cdot t + y^2 + t^2 + 2\cdot y\cdot t\right) - \left(y^2 + t^2 + 2\cdot y\cdot t\right) + \\
&\qquad\quad + (1 + 4t)y^2 - (8t^2 - 2t)y = -4t^3 + 1 - t^2 \\
&\iff \quad (x + y + t)^2 + 4ty^2 - 8t^2y = -4t^3 + 1 \\
&\iff \quad (x + y + t)^2 + 4t\left(y^2 - 2\cdot y\cdot t + t^2\right) - 4t\cdot t^2 = -4t^3 + 1 \\
&\iff \quad (x + y + t)^2 + 4t\,(y - t)^2 = 1,
\end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $t > 0$ ist

  $$(*) \iff (x + y + t)^2 + \left(2\sqrt{t}\,(y - t)\right)^2 = 1,$$

  und mit der affinen Variablentransformation $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + t \\ 2\sqrt{t}\,(y - t) \end{pmatrix}$ ergibt sich in $u^2 + v^2 = 1$ die affine Normalform einer Ellipse.

- Für $t = 0$ ist
$$(*) \iff (x+y+t)^2 = 1,$$
und mit der affinen Variablentransformation $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+t \\ y \end{pmatrix}$ ergibt sich in $u^2 = 1$ die affine Normalform eines parallelen Geradenpaares.
- Für $t < 0$ ist
$$(*) \iff (x+y+t)^2 - \left(2\sqrt{-t}\,(y-t)\right)^2 = 1,$$
und mit der affinen Variablentransformation $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+t \\ 2\sqrt{-t}\,(y-t) \end{pmatrix}$ ergibt sich in $u^2 - v^2 = 1$ die affine Normalform einer Hyperbel.

48. a) Die Gerade b durch die Punkte $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ besitzt den Trägerpunkt A und den Richtungsvektor $u_b = C - A = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}$, folglich den Normalenvektor $\widetilde{u}_b = u_b^{\perp} = \begin{pmatrix} -t \\ t+1 \end{pmatrix}$, und damit die Gleichung
$$\widetilde{u}_b \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \widetilde{u}_b \circ A \qquad \text{bzw.} \qquad -\,t\,x + (t+1)\,y = t.$$

b) Die Höhe h_B des Dreiecks ABC durch die Ecke $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht auf der Seite b durch die Ecken A und C senkrecht; folglich besitzt h_B den Trägerpunkt B und den Normalenvektor u_b und folglich die Gleichung
$$u_b \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u_b \circ B \qquad \text{bzw.} \qquad (t+1)\,x + t\,y = t+1.$$

c) Die Seite durch die Ecken A und B stimmt mit der x–Achse überein; daher ist die Höhe h_C durch den Punkt C eine Parallele zur y–Achse und besitzt die Gleichung $x = t$. Die Koordinaten des Höhenschnittpunkts $H = \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix}$ des Dreiecks ABC müssen nun den Gleichungen der beiden Höhen h_B und h_C genügen; aus
$$(t+1)\,x_H + t\,y_H = t+1 \qquad \text{und} \qquad x_H = t$$
folgt zunächst $(t+1)\,t + t\,y_H = t+1$, also
$$t\,y_H = (t+1) - (t+1)\,t = (t+1)\,(1-t) = 1 - t^2,$$
und wegen $t \neq 0$ ergibt sich
$$y_H = \frac{1-t^2}{t} = \frac{1}{t} - t.$$

d) Die Koordinaten $x_t = t$ und $y_t = \frac{1}{t} - t$ des Höhenschnittpunkts H genügen der Gleichung

$$y = \frac{1}{t} - t = \frac{1}{x} - x \qquad \text{bzw.} \qquad x\,y = 1 - x^2;$$

damit liegt H auf der Quadrik Q des $\mathbb{R}^2$ mit der Gleichung

$$x^2 + x\,y - 1 = 0;$$

wegen

$$x^2 + x\,y - 1 = 0 \iff \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \iff$$
$$\iff \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \iff w^2 - z^2 = 1$$

mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}$ ist Q eine Hyperbel.