

**Tutorium zur Vorlesung  
„Mathematik im Querschnitt“  
— Bearbeitungsvorschlag —**

37. Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 4(x^2 + y^2) + 2xy + x + y - \frac{9}{10} = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = -\frac{9}{10} \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)^2 - 1 = (3 - \lambda)(5 - \lambda)$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  besitzt  $A$  die beiden Eigenwerte  $\lambda_1 = 3$  und  $\lambda_2 = 5$ ; wegen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_1 = 3$ , und wegen

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_2 = 5$ . Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left( \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

gilt dann  $P^\top AP = D$ . Die Variablentransformation  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot P^\top AP \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \frac{9}{10} = 0,$$

und damit

$$3u^2 + 5v^2 + \sqrt{2}v - \frac{9}{10} = 0$$

über. Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner

$$3u^2 + 5 \left( v^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot v + \left( \frac{\sqrt{2}}{10} \right)^2 \right) = \frac{9}{10} + 5 \left( \frac{\sqrt{2}}{10} \right)^2$$

und damit

$$3u^2 + 5 \left( v + \frac{\sqrt{2}}{10} \right)^2 = 1,$$

so daß sich mit der Variablentransformation  $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v + \frac{\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix}$  die Gleichung

$$3w^2 + 5z^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1$$

ergibt; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform dar. Insgesamt ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z - \frac{\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix} = \\ &= P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}}_{=t}; \end{aligned}$$

damit ist

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + t,$$

eine Bewegung, die die Ellipse

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1 \right\}$$

in euklidischer (metrischer) Normalform auf die gegebene Quadrik  $Q$  abbildet. Folglich ist  $Q$  eine Ellipse mit dem Mittelpunkt  $t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$ , den Hauptachsen

$$t + \mathbb{R} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t + \mathbb{R} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie den den Hauptachsenabschnitten der Länge  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  und  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

38. Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 8xy - 3y^2 + 12x + 6y - 1 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = -1 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(-3 - \lambda) - 4^2 = \\ &= -9 + \lambda^2 - 16 = \lambda^2 - 25 = (\lambda - 5)(\lambda + 5) \end{aligned}$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  besitzt  $A$  die beiden Eigenwerte  $\lambda_1 = 5$  und  $\lambda_2 = -5$ ; wegen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_1 = 5$ , und wegen

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_2 = -5$ . Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|} & \frac{v_2}{\|v_2\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

gilt dann  $P^\top AP = D$ . Die Variablentransformation  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot P^\top AP \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - 1 = 0,$$

und damit

$$5u^2 - 5v^2 + \frac{30}{\sqrt{5}}u - 1 = 0$$

über. Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner

$$5 \left( u^2 + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot u + \left( \frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2 \right) - 5v^2 = 1 + 5 \left( \frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2$$

und damit

$$5 \left( u + \frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2 - 5v^2 = 10,$$

so daß sich mit der Variablentransformation  $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \frac{3}{\sqrt{5}} \\ v \end{pmatrix}$  die Gleichung

$$5w^2 - 5z^2 = 10 \quad \text{bzw.} \quad \frac{w^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{z^2}{\sqrt{2}^2} = 1$$

ergibt; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform einer Hyperbel dar.

39. Wir bestimmen zunächst den Abstand eines Punktes  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  der euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  von der Geraden  $\ell$  und der Kreislinie  $K$ :

- Die Gerade  $\ell = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3 \right\}$  besitzt die Hessesche Normalform  $\frac{x-3}{1} = 0$ ; damit ist  $d(P, \ell) = |x-3|$ .

- Es ist  $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4 \right\}$  die Kreislinie um den Mittelpunkt  $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit dem Radius  $r = 2$ ; damit besitzt  $P$  von  $M$  den Abstand  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , woraus sich dann  $d(P, K) = \left| \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right|$  ergibt.

Damit ist

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 3| = 2 \cdot \left| \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right| \right\} = E_1 \cup E_2$$

mit

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \cdot \left( \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right) = x - 3 \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \cdot \left( \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right) = 3 - x \right\};$$

wir zeigen, daß  $E_1$  und  $E_2$  zwei Ellipsen sind, und bestimmen deren Mittelpunkte und die Längen ihrer Hauptachsen.

- Wegen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 &\iff 2\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1 \iff 4(x^2 + y^2) = (x + 1)^2 \iff \\ &\iff 4x^2 + 4y^2 = x^2 + 2x + 1 \iff 3x^2 - 2x + 4y^2 = 1 \iff \\ &\iff 3\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + 4y^2 = 1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 \iff \\ &\iff 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 4y^2 = \frac{4}{3} \iff \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1 \end{aligned}$$

ist  $E_1$  eine Ellipse mit Mittelpunkt  $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$  und Hauptachsenlängen  $\frac{2}{3}$  und  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

- Wegen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2 &\iff 2\sqrt{x^2 + y^2} = 7 - x \iff 4(x^2 + y^2) = (7 - x)^2 \iff \\ &\iff 4x^2 + 4y^2 = 49 - 14x + x^2 \iff 3x^2 + 14x + 4y^2 = 49 \iff \\ &\iff 3\left(x^2 + 2 \cdot \frac{7}{3} \cdot x + \left(\frac{7}{3}\right)^2\right) + 4y^2 = 49 + 3\left(\frac{7}{3}\right)^2 \iff \\ &\iff 3\left(x + \frac{7}{3}\right)^2 + 4y^2 = \frac{196}{3} \iff \frac{\left(x + \frac{7}{3}\right)^2}{\left(\frac{14}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1 \end{aligned}$$

ist  $E_2$  eine Ellipse mit Mittelpunkt  $\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$  und Hauptachsenlängen  $\frac{14}{3}$  und  $\frac{7}{\sqrt{3}}$ .

40. a) Die Höhe  $h_C$  des Dreiecks  $ABC$  durch die Ecke  $C$  steht auf der gegenüberliegenden Seite  $AB$  senkrecht; damit ist  $h_C$  eine Gerade mit dem Trägerpunkt  $t_1 = C = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$  und dem Normalenvektor  $\tilde{u}_1 = B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und besitzt damit die Gleichung

$$\tilde{u}_1 \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{u}_1 \circ t_1 \quad \text{bzw.} \quad x = c.$$

Die Höhe  $h_A$  des Dreiecks  $ABC$  durch die Ecke  $A$  steht auf der gegenüberliegenden Seite  $BC$  senkrecht; damit ist  $h_A$  eine Gerade mit dem Trägerpunkt  $t_2 = A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und dem Normalenvektor  $\tilde{u}_2 = C - B = \begin{pmatrix} c - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und besitzt damit die Gleichung

$$\tilde{u}_2 \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{u}_2 \circ t_2 \quad \text{bzw.} \quad (c - 1)x + y = 0.$$

Für den Höhenschnittpunkt  $H = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  gilt also

$$x_0 = c \quad (\text{wegen } H \in h_C) \quad \text{und} \quad (c - 1)x_0 + y_0 = 0 \quad (\text{wegen } H \in h_A);$$

damit ergibt sich  $y_0 = -(c - 1)x_0$  und folglich

$$H = \begin{pmatrix} c \\ (1 - c)c \end{pmatrix}.$$

- b) Der Höhenfußpunkt  $H_C = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$  der Höhe  $h_C$  auf der Dreiecksseite  $AB$  liegt für  $c < 0$  links von  $A$  sowie für  $c > 1$  rechts von  $B$ ; damit liegt der Höhenschnittpunkt  $H$  für diese Wahl der Parameter sicherlich außerhalb des Dreiecks.

Für  $c \in [0; 1]$  liegt der Höhenfußpunkt  $H_C$  dagegen auf der Strecke  $[AB]$ . Ferner besitzt der Höhenfußpunkt  $H_A$  als Punkt der Dreiecksseite  $BC$  die Gestalt

$$B + \lambda \cdot (C - B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} c - 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei er als Punkt der Höhe  $h_A$  deren Gleichung genügt; aus

$$(c - 1)(1 + \lambda(c - 1)) + \lambda = 0$$

ergibt sich

$$(c - 1) + \lambda(c - 1)^2 + \lambda = 0, \quad \text{also} \quad \lambda = \frac{1 - c}{(c - 1)^2 + 1},$$

und wegen  $\lambda \in [0; 1]$  liegt auch der Höhenfußpunkt  $H_A$  auf der Strecke  $[BC]$ . Damit liegt aber der Höhenschnittpunkt  $H$  jetzt innerhalb des Dreiecks.

- c) Die Koordinaten des Höhenschnittpunkts  $H = \begin{pmatrix} c \\ (1-c)c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  genügen der Gleichung

$$y = (1-c)c = (1-x)x = x - x^2.$$

Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich daraus

$$\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = -y + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

und damit

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -y + \frac{1}{4}.$$

Mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ -y + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ergibt sich die euklidische Normalform

$$w^2 = z$$

einer Parabel; dabei ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w + \frac{1}{2} \\ -z + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{P \in O_2(\mathbb{R})} \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{=t \in \mathbb{R}^2}.$$