

## Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Bearbeitungsvorschlag —

33. a) Die gegebene Ellipse  $E$  besitzt die Gleichung

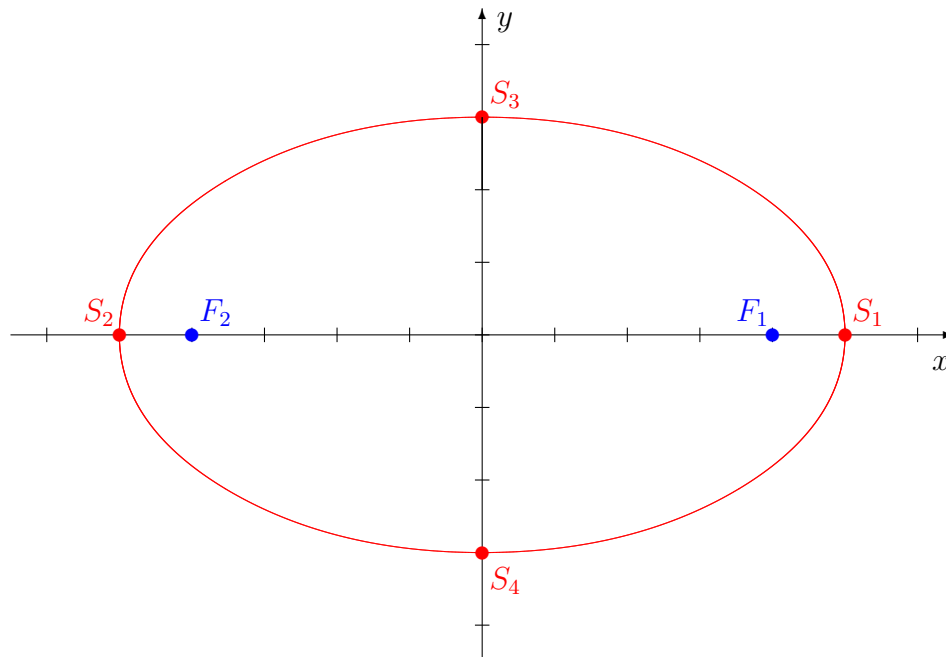
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{für} \quad a = 5 \quad \text{und} \quad b = 3;$$

damit besitzt sie die vier Scheitelpunkte

$$S_1 = (5; 0) \quad \text{und} \quad S_2 = (-5; 0) \quad \text{sowie} \quad S_3 = (0; 3) \quad \text{und} \quad S_4 = (0; -3)$$

und wegen  $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16} = 4$  die beiden Brennpunkte

$$F_1 = (4; 0) \quad \text{und} \quad F_2 = (-4; 0).$$



b) Die gegebene Hyperbel  $H$  besitzt die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{für} \quad a = 4 \quad \text{und} \quad b = 3;$$

damit besitzt sie die beiden Scheitelpunkte

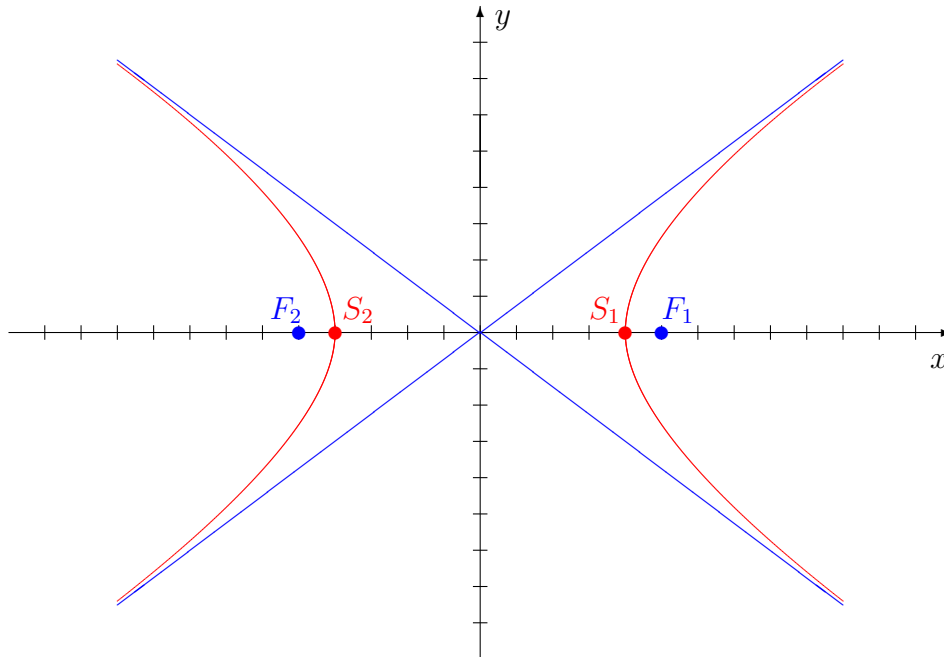
$$S_1 = (4; 0) \quad \text{und} \quad S_2 = (-4; 0),$$

wegen  $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5$  die beiden Brennpunkte

$$F_1 = (5; 0) \quad \text{und} \quad F_2 = (-5; 0)$$

sowie die beiden Asymptoten

$$y = \frac{3}{4}x \quad \text{und} \quad y = -\frac{3}{4}x.$$



- c) Der Punkt  $P_0 = (5, y_0)$  liegt genau dann auf der Hyperbel  $H$ , wenn seine Koordinaten der Hyperbelgleichung genügen; damit gilt

$$\begin{aligned} P_0 \in H &\iff \frac{5^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} = 1 \iff \frac{25}{16} - 1 = \frac{y_0^2}{9} \iff \\ &\iff \frac{y_0^2}{9} = \frac{9}{16} \iff y_0^2 = \frac{81}{16} \iff y_0 = \pm \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Die Tangente an die Hyperbel  $H$  im Punkt  $(5; \frac{9}{4})$  besitzt dann die Gleichung

$$\frac{5x}{16} - \frac{\frac{9}{4}y}{9} = 1 \quad \text{bzw.} \quad 5x - 4y = 16,$$

und die Tangente an die Hyperbel  $H$  im Punkt  $(5; -\frac{9}{4})$  besitzt dann die Gleichung

$$\frac{5x}{16} - \frac{-\frac{9}{4}y}{9} = 1 \quad \text{bzw.} \quad 5x + 4y = 16.$$

34. a) Die Schnittpunkte von  $Q_1$  und  $Q_2$  sind genau diejenigen Punkte  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ , deren Koordinaten sowohl der Ellipsengleichung

$$Q_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1$$

als auch der Hyperbelgleichung

$$Q_2 : \frac{x^2}{1-b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

genügen; wir haben also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \frac{1}{a^2} \cdot x^2 + \frac{1}{a^2-1} \cdot y^2 = 1 \\ \text{(II)} \quad & \frac{1}{1-b^2} \cdot x^2 - \frac{1}{b^2} \cdot y^2 = 1 \end{aligned}$$

in den Unbestimmten  $x^2$  und  $y^2$  zu lösen. Mit Hilfe des Additionsverfahrens ergibt sich über „ $(a^2-1) \cdot \text{(I)} + b^2 \cdot \text{(II)}$ “

$$\left( \frac{a^2-1}{a^2} + \frac{b^2}{1-b^2} \right) \cdot x^2 = (a^2-1) + b^2,$$

wegen

$$\frac{a^2-1}{a^2} + \frac{b^2}{1-b^2} = \frac{(a^2-1) \cdot (1-b^2) + a^2 \cdot b^2}{a^2 \cdot (1-b^2)} = \frac{a^2-1+b^2}{a^2 \cdot (1-b^2)}$$

also

$$x^2 = \frac{a^2 \cdot (1-b^2)}{a^2-1+b^2} \cdot (a^2-1+b^2) = a^2 \cdot (1-b^2),$$

und damit über Gleichung (I)

$$\frac{1}{a^2} \cdot a^2 \cdot (1-b^2) + \frac{1}{a^2-1} \cdot y^2 = 1,$$

also

$$\frac{1}{a^2-1} \cdot y^2 = b^2 \quad \text{bzw.} \quad y^2 = b^2 \cdot (a^2-1).$$

Damit ist

$$x = \pm a \sqrt{1-b^2} \quad \text{und} \quad y = \pm b \sqrt{a^2-1},$$

weswegen die Ellipse  $Q_1$  und die Hyperbel  $Q_2$  die vier Schnittpunkte

$$\begin{aligned} (a \sqrt{1-b^2}, b \sqrt{a^2-1}) & \quad (a \sqrt{1-b^2}, -b \sqrt{a^2-1}) \\ (-a \sqrt{1-b^2}, b \sqrt{a^2-1}) & \quad (-a \sqrt{1-b^2}, -b \sqrt{a^2-1}) \end{aligned}$$

besitzen.

b) Wir betrachten nun den im 1. Quadranten liegenden Schnittpunkt

$$S = \left( a \sqrt{1-b^2}, b \sqrt{a^2-1} \right) \in Q_1 \cap Q_2.$$

Die Tangente  $T_S Q_1$  an die Ellipse  $Q_1$  im Punkt  $S$  besitzt die Gleichung

$$\frac{a \sqrt{1-b^2} \cdot x}{a^2} + \frac{b \sqrt{a^2-1} \cdot y}{a^2-1} = 1,$$

es ist also

$$T_S Q_1 \quad : \quad \frac{\sqrt{1-b^2}}{a} \cdot x + \frac{b}{\sqrt{a^2-1}} \cdot y = 1,$$

und die Tangente  $T_S Q_2$  an die Hyperbel  $Q_2$  im Punkt  $S$  besitzt die Gleichung

$$\frac{a\sqrt{1-b^2} \cdot x}{1-b^2} + \frac{b\sqrt{a^2-1} \cdot y}{b^2} = 1,$$

es ist also

$$T_S Q_2 \quad : \quad \frac{a}{\sqrt{1-b^2}} \cdot x - \frac{\sqrt{a^2-1}}{b} \cdot y = 1.$$

Damit sind aber

$$\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1-b^2}}{a} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2-1}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{1-b^2}} \\ -\frac{\sqrt{a^2-1}}{b} \end{pmatrix}$$

Normalenvektoren der Tangenten  $T_S Q_1$  und  $T_S Q_2$ ; wegen

$$\tilde{u}_1 \circ \tilde{u}_2 = \frac{\sqrt{1-b^2}}{a} \cdot \frac{a}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \left( -\frac{\sqrt{a^2-1}}{b} \right) = 0$$

schneiden sich die Tangenten  $T_S Q_1$  und  $T_S Q_2$  unter einem rechten Winkel.

35. a) Ein Punkt  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  liegt genau dann sowohl auf der Geraden mit der Gleichung  $y = ax + t$  als auch auf der Parabel mit der Gleichung  $y = x^2$ , wenn  $x^2 = ax + t$  gilt. Damit existieren genau dann zwei Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$ , wenn die quadratische Gleichung

$$x^2 - ax - t = 0$$

zwei verschiedene reelle Lösungen besitzt; dies ist aber genau dann der Fall, wenn für die Diskriminante

$$\Delta = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-t) = a^2 + 4t > 0$$

gilt, also für

$$t > -\frac{a^2}{4}.$$

Man erhält dann die beiden Schnittpunkte  $S_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  und  $S_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  mit

$$x_{1,2} = \frac{-(-a) \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 1} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4t}}{2}$$

und

$$y_{1,2} = ax_{1,2} + t = \frac{a^2 \pm a\sqrt{a^2 + 4t}}{2} + t;$$

wegen

$$x_1 + x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4t}}{2} + \frac{a - \sqrt{a^2 + 4t}}{2} = a$$

und

$$y_1 + y_2 = \left( \frac{a^2 + a\sqrt{a^2 + 4t}}{2} + t \right) + \left( \frac{a^2 - a\sqrt{a^2 + 4t}}{2} + t \right) = a^2 + 2t$$

ergibt sich dann für den Mittelpunkt  $M_{a,t}$  der Verbindungsstrecke von  $S_1$  und  $S_2$

$$M_{a,t} = \frac{S_1 + S_2}{2} = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left( \frac{a}{2}, \frac{a^2}{2} + t \right).$$

b) Die Menge  $G_a$  aller Mittelpunkte

$$M_{a,t} = \left( \frac{a}{2}, \frac{a^2}{2} + t \right) \quad \text{mit} \quad t > -\frac{a^2}{4}$$

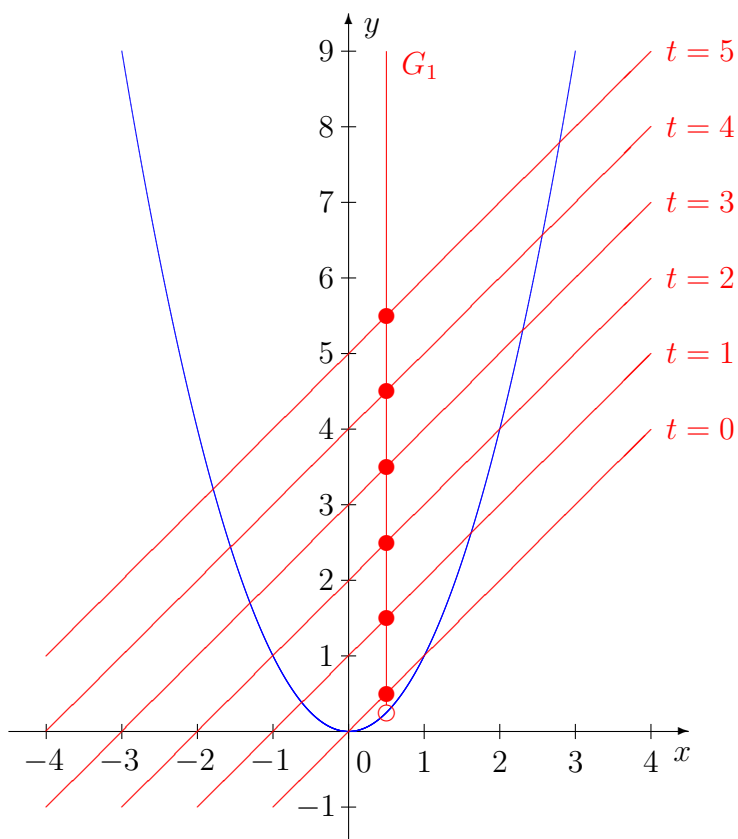
besteht genau aus allen Punkten  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  mit

$$x = \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{a^2}{2} + t > \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4};$$

damit handelt es sich bei  $G_a$  um die Halbgerade

$$G_a = \left( \frac{a}{2}, \frac{a^2}{4} \right) + \mathbb{R}^+ \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Die folgende Skizze stellt die Situation für  $a = 1$  dar:



36. a) Die beiden Asymptoten

$$g_1 : y = \frac{b}{a} \cdot x \quad \text{und} \quad g_2 : y = -\frac{b}{a} \cdot x$$

besitzen die Gleichungen

$$g_1 : bx - ay = 0 \quad \text{und} \quad g_2 : bx + ay = 0,$$

also die Normalenvektoren

$$\tilde{u}_{1,2} = \begin{pmatrix} b \\ \pm a \end{pmatrix} \quad \text{der Länge} \quad \|\tilde{u}_{1,2}\| = \sqrt{b^2 + (\pm a)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und damit die Hessesche Normalformen

$$g_1 : \frac{bx - ay}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \quad \text{und} \quad g_2 : \frac{bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

Folglich besitzt der Punkt  $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  zu den beiden Asymptoten  $g_1$  und  $g_2$  die Abstände

$$d(P, g_1) = \left| \frac{bx_0 - ay_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \quad \text{und} \quad d(P, g_2) = \left| \frac{bx_0 + ay_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|.$$

b) Für einen Punkt  $P = (x_0, y_0)$  auf der Hyperbel gilt

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

und damit

$$\begin{aligned} d(P, g_1) \cdot d(P, g_2) &= \left| \frac{bx_0 - ay_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \cdot \left| \frac{bx_0 + ay_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \\ &= \left| \frac{bx_0 - ay_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{bx_0 + ay_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \\ &= \left| \frac{(bx_0 - ay_0) \cdot (bx_0 + ay_0)}{(\sqrt{a^2 + b^2})^2} \right| = \\ &= \left| \frac{b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2}{a^2 + b^2} \right| = \left| \frac{a^2 b^2 \left( \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \right)}{a^2 + b^2} \right| = \\ &= \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \cdot \underbrace{\left| \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \right|}_{=1} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$