MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 8
01.12.2014

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Bearbeitungsvorschlag —

29. a) Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + 2\,y' + 2\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2 + 1 = (\lambda + 1 - i)\,(\lambda + 1 + i)$$

mit den beiden einfachen Nullstellen $\lambda_1 = -1 + i$ und $\lambda_2 = -1 - i$; damit bilden die beiden Funktionen φ_1, $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{-x}\,\cos x \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = e^{-x}\,\sin x$$

ein Fundamentalsystem von (D_0).

b) Die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = -4\,x^2 - 2,$$

ist von der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = -4\,x^2 - 2$ vom Grade $m = 2$ und $a = 0$. Da a keine Nullstelle von χ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung φ_p von

$$(\mathrm{D}) \qquad y'' + 2\,y' + 2\,y = -4\,x^2 - 2$$

den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$ vom Grade $m = 2$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = 2\,r\,x + s \qquad \text{und} \qquad \varphi_p''(x) = 2\,r$$

ist φ_p genau dann Lösung von (D), wenn

$$2\,r + 2\,(2\,r\,x + s) + 2\,\big(r\,x^2 + s\,x + t\big) = -4\,x^2 - 2,$$

also

$$2\,r\,x^2 + (4\,r + 2\,s)\,x + (2\,r + 2\,s + 2\,t) = -4\,x^2 - 2,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$2\,r = -4, \quad 4\,r + 2\,s = 0 \quad \text{und} \quad 2\,r + 2\,s + 2\,t = -2,$$

also $r = -2$, $s = 4$ und $t = -3$, und folglich

$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_p(x) = -2\,x^2 + 4\,x - 3.$$

30. a) Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + 4\,y' + 3\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 4\,\lambda + 3 = (\lambda + 1)\,(\lambda + 3)$$

mit den beiden einfachen Nullstellen $\lambda_1 = -1$ sowie $\lambda_2 = -3$; damit bilden die beiden Funktionen $\varphi_1,\, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{-x} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = e^{-3x}$$

ein Fundamentalsystem von (D_0). Folglich ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-3x},$$

mit Konstanten $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D_0).

b) Die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = 10 \cos x,$$

ist von der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x} \cos(kx)$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 10$ vom Grade $m = 0$ sowie $a = 0$ und $k = 1$. Da $a + ki = i$ keine Nullstelle von χ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung φ_p der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}) \qquad y'' + 4\,y' + 3\,y = 10 \cos x$$

den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q_1(x)\, \cos x + q_2(x)\, \sin x$$

mit Polynomfunktionen $q_1(x) = r$ und $q_2(x) = s$ vom Grade $m = 0$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = -r \sin x + s \cos x \quad \text{und} \quad \varphi_p''(x) = -r \cos x - s \sin x$$

ist φ_p genau dann Lösung von (D), wenn

$$(-r \cos x - s \sin x) + 4\,(-r \sin x + s \cos x) + 3\,(r \cos x + s \sin x) = 10 \cos x,$$

also

$$(2\,r + 4\,s) \cos x + (-4\,r + 2\,s) \sin x = 10 \cos x,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $2\,r + 4\,s = 10$ und $-4\,r + 2\,s = 0$, also $r = 1$ und $s = 2$, und folglich $\varphi_p(x) = \cos x + 2 \sin x$.

c) Gemäß a) und b) ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\, \varphi_1 + c_2\, \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; \varphi(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-3x} + \cos x + 2 \sin x,$$

mit $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D) mit

$$\varphi'(x) = -c_1\, e^{-x} - 3\, c_2\, e^{-3x} - \sin x + 2 \cos x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; damit ist

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot 0 = 0 \iff c_1 + c_2 + 1 = 0$$

und

$$\varphi'(0) = 0 \iff -c_1 \cdot 1 - 3\,c_2 \cdot 1 - 0 + 2 \cdot 1 = 0 \iff -c_1 - 3\,c_2 + 2 = 0,$$

woraus sich $c_1 = -\frac{5}{2}$ und $c_2 = \frac{3}{2}$ ergibt. Damit ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -\frac{5}{2}\,e^{-x} + \frac{3}{2}\,e^{-3x} + \cos x + 2 \sin x,$$

die gesuchte Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

31. Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + 2\,y' + y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda = -1$; damit bilden die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = e^{-x}, \qquad \text{und} \qquad \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_2(x) = x\,e^{-x},$$

ein Fundamentalsystem von (D_0). Die gegebene inhomogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}) \qquad y'' + 2\,y' + y = e^{-x}$$

besitzt die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = e^{-x},$$

der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 1$ vom Grade $m = 0$ und der Nullstelle $a = -1$ von χ der Ordnung $\alpha = 2$. Für die partikuläre Lösung φ_p von (D) wählen wir den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)\,e^{-x} = \big(r\,x^2 + s\,x + t\big)\,e^{-x}$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$ vom Grade $m + \alpha = 2$; nachdem e^{-x} und $x\,e^{-x}$ die homogene Gleichung (D_0) lösen, können wir $s = t = 0$ wählen. Wegen

$$\varphi_p'(x) = 2\,r\,x\,e^{-x} - r\,x^2\,e^{-x} = \big(2\,r\,x - r\,x^2\big)\,e^{-x}$$

und

$$\varphi_p''(x) = (2\,r - 2\,r\,x)\,e^{-x} - \big(2\,r\,x - r\,x^2\big)\,e^{-x} = \big(2\,r - 4\,r\,x + r\,x^2\big)\,e^{-x}$$

ist φ_p genau dann Lösung von (D), wenn

$$\big(2\,r - 4\,r\,x + r\,x^2\big)\,e^{-x} + 2\,\big(2\,r\,x - r\,x^2\big)\,e^{-x} + r\,x^2\,e^{-x} = e^{-x},$$

also

$$2\,r\,e^{-x} = e^{-x},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $r = \frac{1}{2}$ und folglich $\varphi_p(x) = \frac{1}{2}\,x^2\,e^{-x}$. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \left(c_1 + c_2\,x + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x},$$

mit $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D); dabei ist

$$\varphi'(x) = (c_2 + x)\,e^{-x} - \left(c_1 + c_2\,x + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} = \left((c_2 - c_1) + (1 - c_2)\;x - \frac{x^2}{2}\right) e^{-x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Unter Berücksichtigung der gegebenen Anfangswerte ergibt sich

$$\varphi(0) = 1 \iff c_1 \cdot e^0 = 1 \iff c_1 = 1$$

und damit

$$\varphi'(0) = 1 \iff (c_2 - c_1) \cdot e^0 = 1 \iff c_2 = 1 + c_1 \iff c_2 = 2;$$

folglich ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \left(1 + 2\,x + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x},$$

die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

32. Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + 4\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 4 = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$$

mit den beiden konjugiert–komplexen Nullstellen $\lambda_{1,2} = \varrho \pm i\sigma$ mit $\varrho = 0$ und $\sigma = 2$; damit bilden die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{\varrho x}\cos(\sigma x) = \cos(2x),$$

und

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = e^{\varrho x}\sin(\sigma x) = \sin(2x),$$

ein Fundamentalsystem von (D_0). Die gegebene inhomogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}) \qquad y'' + 4\,y = \sin(2x)$$

besitzt die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = \sin(2x),$$

der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x}\, \sin(k\,x)$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 1$ vom Grade $m = 0$ und der Nullstelle $a + ik = 2i$ von χ der Ordnung $\alpha = 1$. Für die partikuläre Lösung φ_p von (D) wählen wir den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q_1(x)\, \cos(2x) + q_2(x)\, \sin(2x)$$

mit Polynomfunktionen $q_1(x) = r_1\, x + s_1$ und $q_2(x) = r_2\, x + s_2$ vom Grade $m + \alpha = 1$; nachdem $\cos(2x)$ und $\sin(2x)$ die homogene Gleichung (D_0) lösen, können wir $s_1 = s_2 = 0$ wählen. Wegen

$$\begin{aligned} \varphi_p'(x) &= r_1\,(\cos(2x) - 2x\, \sin(2x)) + r_2\,(\sin(2x) + 2x\, \cos(2x)) \\ &= (r_1 + 2r_2 x)\cos(2x) + (r_2 - 2r_1 x)\sin(2x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_p''(x) &= (2r_2\cos(2x) - 2\,(r_1 + 2r_2 x)\sin(2x)) + \\ &\qquad + (-2r_1\sin(2x) + 2\,(r_2 - 2r_1 x)\cos(2x)) \\ &= 4\,(r_2 - r_1 x)\cos(2x) - 4\,(r_1 + r_2 x)\sin(2x) \end{aligned}$$

ist φ_p genau dann Lösung von (D), wenn

$$4\,(r_2 - r_1 x)\cos(2x) - 4\,(r_1 + r_2 x)\sin(2x) + 4\,(r_1 x\cos(2x) + r_2 x\sin(2x)) = \sin(2x),$$

also

$$4\, r_2\, \cos(2x) - 4\, r_1\, \sin(2x) = \sin(2x),$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit erhält man $r_1 = -\frac{1}{4}$ und $r_2 = 0$, insgesamt also $\varphi_p(x) = -\frac{1}{4}\, x\, \cos(2x)$. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\, \varphi_1 + c_2\, \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \left(c_1 - \frac{x}{4}\right)\cos(2x) + c_2\sin(2x),$$

mit $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D); dabei ist

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\frac{1}{4}\cos(2x) - 2\left(c_1 - \frac{x}{4}\right)\sin(2x) + 2c_2\cos(2x) \\ &= \left(2c_2 - \frac{1}{4}\right)\cos(2x) - 2\left(c_1 - \frac{x}{4}\right)\sin(2x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Unter Berücksichtigung der gegebenen Anfangswerte ergibt sich

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1\cos 0 + c_2\sin 0 = 0 \iff c_1 = 0$$

und

$$\varphi'(0) = 0 \iff \left(2c_2 - \frac{1}{4}\right)\cos 0 - 2c_1\sin 0 = 0 \iff 2c_2 = \frac{1}{4} \iff c_2 = \frac{1}{8};$$

folglich ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -\frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{1}{8}\sin(2x),$$

die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.