

**Tutorium zur Vorlesung  
„Mathematik im Querschnitt“  
— Bearbeitungsvorschlag —**

21. Es handelt sich um eine Differentialgleichung  $y' = h(x) \cdot g(y)$  mit getrennten Variablen; dabei ist

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = -(1 + 2x), \quad \text{und} \quad g : \left] -\frac{1}{2}, \infty \right[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) = \frac{1}{1 + 2y}.$$

Wegen  $g(y) \neq 0$  für alle  $y > -\frac{1}{2}$  erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int (1 + 2y) dy = - \int (1 + 2x) dx$$

und damit

$$y + y^2 = -(x + x^2) + c$$

für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ . Wegen

$$y(0) = 0 \iff 0 + 0^2 = -(0 + 0^2) + c \iff 0 = -0 + c \iff c = 0$$

erhält man

$$y + y^2 = -(x + x^2),$$

woraus sich mit quadratischer Ergänzung zunächst

$$\left(\frac{1}{2} + y\right)^2 = \frac{1}{4} + y + y^2 = \frac{1}{4} - (x + x^2)$$

und wegen  $\frac{1}{2} + y > 0$  schließlich

$$\frac{1}{2} + y = \sqrt{\frac{1}{4} - (x + x^2)} \quad \text{bzw.} \quad y = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - (x + x^2)}$$

ergibt. Nachdem die Wurzelfunktion zwar auf  $\mathbb{R}_0^+$  definiert und dort stetig, aber nur auf  $\mathbb{R}^+$  differenzierbar ist, enthält das maximale Lösungsintervall alle  $x \in \mathbb{R}$ , für die der Radikand positiv ist; wegen

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - (x + x^2) > 0 &\iff \frac{1}{4} > x + x^2 \iff \frac{1}{2} > \frac{1}{4} + x + x^2 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 \iff \\ &\iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2} + x < \frac{1}{\sqrt{2}} \iff -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} < x < -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ist also

$$\varphi : \left] \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - (x + x^2)},$$

die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

22. Es handelt sich um die Differentialgleichung  $y' = h(x) \cdot g(y)$  mit getrennten Variablen mit der stetigen Funktion

$$h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{x},$$

und der stetig differenzierbaren Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) = y^2;$$

damit gibt es zu jedem Punkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $\varphi : D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi(x_0) = y_0$ . Die Nullstelle  $y = 0$  von  $g$  liefert dabei die konstante Lösung  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi(x) = 0$ , und die gesuchte Lösung  $\varphi : D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$  des gestellten Anfangswertproblems

$$y' = \frac{1}{x} \cdot y^2 \quad \text{mit} \quad y(1) = 1$$

kann keinen gemeinsamen Punkt mit  $\psi$  haben, ihr Graph  $G_\varphi$  verläuft also komplett oberhalb der  $x$ -Achse. Damit erhalten wir

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{1}{x} dx, \quad \text{also} \quad -\frac{1}{y} = \ln|x| + c \stackrel{x>0}{=} \ln x + c$$

für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ ; wegen  $y(1) = 1$  ergibt sich

$$-\frac{1}{1} = \ln 1 + c \iff -1 = c$$

und damit

$$-\frac{1}{y} = \ln x - 1, \quad \text{also} \quad y = \frac{1}{1 - \ln x}.$$

Die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$\varphi : ]0; e[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1 - \ln x};$$

von den beiden maximalen Definitionsintervallen  $]0; e[$  und  $]e; \infty[$  der Funktion  $x \mapsto \frac{1}{1 - \ln x}$  ist dabei dasjenige zu wählen, das den Anfangswert  $x_0 = 1$  enthält.

23. Dem gegebenen Anfangswertproblem

$$y' = \frac{2 \cos^2(y)}{1 - x^2} \quad \text{mit} \quad y(0) = \frac{\pi}{3}$$

liegt die Differentialgleichung  $y' = h(x) \cdot g(y)$  mit getrennten Variablen für die stetigen Funktionen

$$h : ]-1; 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{2}{1-x^2}, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) = \cos^2 y,$$

zugrunde; dabei wählen wir für  $h$  das maximale Definitionsintervall, welches den Punkt  $x_0 = 0$  beinhaltet. Die Nullstellen von  $g$ , also die Nullstellen  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  des Cosinus, liefern die konstanten Lösungen der Differentialgleichung; da nun  $g$  sogar stetig differenzierbar ist, kann wegen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes jede weitere Lösung der gegebenen Differentialgleichung keinen gemeinsamen Punkt mit einer konstanten Lösung besitzen. Folglich verläuft der Graph  $G_\varphi$  der maximalen Lösung  $\varphi : D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$  des gestellten Anfangswertproblems wegen  $\varphi(0) = \frac{\pi}{3}$  komplett zwischen  $y = -\frac{\pi}{2}$  und  $y = \frac{\pi}{2}$ . Wir erhalten

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \frac{2}{1-x^2} dx,$$

wegen

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x) \cdot (1+x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$

also

$$\tan y = \ln(1+x) - \ln(1-x) + c$$

für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ ; wegen

$$y(0) = \frac{\pi}{3} \iff \tan \frac{\pi}{3} = \ln(1+0) - \ln(1-0) + c \iff \sqrt{3} = c$$

erhalten wir

$$\tan y = \ln \frac{1+x}{1-x} + \sqrt{3} \quad \text{bzw.} \quad y = \arctan \left( \ln \frac{1+x}{1-x} + \sqrt{3} \right),$$

und damit die maximale Lösung

$$\varphi : ]-1; 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \arctan \left( \ln \frac{1+x}{1-x} + \sqrt{3} \right).$$

24. a) Bei dem gegebenen Anfangswertproblem

$$y' = e^{x-y} = e^x \cdot e^{-y} \quad \text{mit} \quad y(0) = \ln 2$$

handelt es sich um eine Differentialgleichung  $y' = g(y) \cdot h(x)$  mit getrennten Variablen mit den beiden stetigen Funktionen

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) = e^{-y}, \quad \text{und} \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = e^x.$$

Wegen  $g(y) = e^{-y} \neq 0$  für alle  $y \in \mathbb{R}$  erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int e^y dy = \int e^x dx, \quad \text{also} \quad e^y = e^x + c,$$

für ein  $c \in \mathbb{R}$ ; dabei gilt

$$y(0) = \ln 2 \iff e^{\ln 2} = e^0 + c \iff 2 = 1 + c \iff c = 1$$

und damit

$$e^y = e^x + 1 \iff y = \ln(e^x + 1),$$

so daß

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \ln(e^x + 1),$$

die auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Lösungsfunktion des gestellten Anfangswertproblems ist.

b) Für die Lösungsfunktion  $\varphi$  von a) erhält man die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left( \underbrace{e^x + 1}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \rightarrow 1}} \right) \stackrel{\text{ln stetig}}{=} \ln 1 = 0$$

sowie

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + 1) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x + 1}{e^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 + \underbrace{e^{-x}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \rightarrow 1}} \right) \stackrel{\text{ln stetig}}{=} \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

so daß sich für ihren Graphen  $G_\varphi$  die folgende Skizze ergibt:

