MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 5
10.11.2014

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querchnitt“ — Bearbeitungsvorschlag —

17. Zu betrachten ist die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung $y' = a(x)\,y + b(x)$ mit

$$a :]-\infty; 2[\to \mathbb{R}, \quad a(x) = \frac{1}{x-2}, \quad \text{und} \quad b :]-\infty; 2[\to \mathbb{R}, \quad b(x) = x^2 - 2\,x.$$

Da

$$A :]-\infty; 2[\to \mathbb{R}, \quad A(x) = \ln|x-2| \underset{x<2}{=} \ln(2-x),$$

eine Stammfunktion von a ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c :]-\infty; 2[\to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\,e^{A(x)} = c\,e^{\ln(2-x)} = c\,(2-x),$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)\,y$ dar.

Zur Behandlung der inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz $\varphi :]-\infty; 2[\to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = u(x) \cdot (2-x)$, der Variation der Konstanten mit einer differenzierbaren Funktion $u :]-\infty; 2[\to \mathbb{R}$. Wegen

$$\varphi'(x) = u'(x) \cdot (2-x) + u(x) \cdot (-1)$$

für alle $x < 2$ ist φ genau dann Lösung von $y' = a(x)\,y + b(x)$, wenn

$$u'(x)\,(2-x) - u(x) = \frac{1}{x-2} \cdot (u(x)\,(2-x)) + \left(x^2 - 2\,x\right),$$

also

$$u'(x) = \frac{x^2 - 2\,x}{2-x} = \frac{x\,(x-2)}{-(x-2)} = -x$$

für alle $x < 2$ gilt.

- Um eine partikuläre Lösung $\varphi_p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu erhalten, können wir speziell

  $$u(x) = -\frac{x^2}{2}$$

  und damit

  $$\varphi_p(x) = u(x)\,(2-x) = -\frac{x^2}{2} \cdot (2-x)$$

für alle $x < 2$ wählen. Die allgemeine Lösung von $y' = a(x)\,y + b(x)$ ist damit die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_p + \varphi_c : \left]-\infty; 2\right[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\frac{x^2}{2} \cdot (2-x) + c\,(2-x) = \left(-\frac{x^2}{2} + c\right) \cdot (2-x),$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

- Um gleich die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu erhalten, wählen wir

$$u(x) = -\frac{x^2}{2} + c$$

für $c \in \mathbb{R}$ und damit

$$\varphi(x) = u(x)\,(2-x) = \left(-\frac{x^2}{2} + c\right) \cdot (2-x)$$

für alle $x < 2$.

Schließlich bestimmen wir die noch freie Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß $\varphi(1) = \frac{3}{2}$ gilt; wegen

$$\varphi(1) = \frac{3}{2} \iff -\frac{1}{2} + c = \frac{3}{2} \iff c = 2$$

ist

$$\varphi : \left]-\infty; 2\right[\to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \left(-\frac{x^2}{2} + 2\right) \cdot (2-x),$$

die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{1}{x-2}\,y + x^2 - 2\,x \qquad \text{für} \quad x < 2 \qquad \text{mit} \quad y(1) = \tfrac{3}{2};$$

der Funktionsterm von φ läßt sich noch zu

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(4 - x^2\right)(2-x) = \frac{1}{2}\,(2+x)\,(2-x)^2$$

für alle $x < 2$ umformen.

18. a) Für alle $x \in \left]-1; 1\right[$ gilt

$$\frac{1}{1+x} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{(1+x^2) - x \cdot (1+x)}{(1+x)\,(1+x^2)} = \frac{1-x}{(1+x)\,(1+x^2)} = a(x),$$

woraus sich wegen

$$a(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\,x}{1+x^2}$$

damit etwa die Stammfunktion A mit

$$A(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) = \ln\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ergibt.

b) Bei der gegebenen Differentialgleichung $(*)\quad y' = a(x)\,y$ handelt es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit der stetigen Koeffizientenfunktion $a :]-1;1[\to \mathbb{R}$; damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c :]-1;1[\to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c \cdot e^{A(x)} = c \cdot \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}},$$

mit $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $(*)$. Für die noch freie Konstante $c \in \mathbb{R}$ ergibt sich über die gegebene Anfangsbedingung $y(0) = 1$ dann

$$1 = \varphi_c(0) = c \cdot \frac{1+0}{\sqrt{1+0^2}} = c;$$

damit ist

$$\varphi_1 :]-1;1[\to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}},$$

die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

19. a) Für jede Lösungsfunktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$x\,y' = 2\,y + x^2 \qquad \text{mit} \qquad x > 0$$

gilt

$$x \cdot f'(x) = 2\,f(x) + x^2 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+;$$

da f nach Voraussetzung mindestens dreimal stetig differenzierbar ist, ergibt sich daraus unter Verwendung der Produktregel zunächst

$$1 \cdot f'(x) + x \cdot f''(x) = 2\,f'(x) + 2\,x \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

also

$$x \cdot f''(x) = f'(x) + 2\,x \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

und danach

$$1 \cdot f''(x) + x \cdot f'''(x) = f''(x) + 2 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

also

$$x \cdot f'''(x) = 2 \qquad \text{bzw.} \qquad f'''(x) = \frac{2}{x} \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

b) Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$f'''(x) = \frac{2}{x} \qquad \text{mit} \qquad f(1) = -\frac{1}{2}, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) = 2.$$

Aus

$$f'''(x) = \frac{2}{x} \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

folgt durch Integration zunächst

$$f''(x) = 2\ln x + c_2 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

wobei sich für die Integrationskonstante $c_2 \in \mathbb{R}$ über den Anfangswert

$$f''(1) = 2 \iff 2\ln 1 + c_2 = 2 \underset{\ln 1 = 0}{\iff} c_2 = 2$$

und damit

$$f''(x) = 2\ln x + 2 = 2\,(\ln x + 1) \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

ergibt. Wegen

$$\int \underbrace{2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(\ln x + 1)}_{v(x)}\,dx = \underbrace{2\,x}_{u(x)} \cdot \underbrace{(\ln x + 1)}_{v(x)} - \int \underbrace{2\,x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,dx =$$

$$= 2\,x\,(\ln x + 1) - \int 2\,dx = 2\,x\,(\ln x + 1) - 2\,x + C = 2\,x\,\ln x + C$$

erhält man durch erneute Integration

$$f'(x) = 2\,x\,\ln x + c_1 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

wobei sich für die Integrationskonstante $c_1 \in \mathbb{R}$ über den Anfangswert

$$f'(1) = 0 \iff 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 + c_1 = 0 \underset{\ln 1 = 0}{\iff} c_1 = 0$$

und damit

$$f'(x) = 2\,x\,\ln x \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

ergibt. Wegen

$$\int \underbrace{2\,x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)}\,dx = \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)} - \int \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,dx =$$

$$= x^2 \ln x - \int x\,dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C$$

liefert eine abschließende Integration

$$f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + c_0 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

wobei sich für die Integrationskonstante $c_0 \in \mathbb{R}$ über den Anfangswert

$$f(1) = -\frac{1}{2} \iff 1^2 \cdot \ln 1 - \frac{1^2}{2} + c_0 = -\frac{1}{2} \underset{\ln 1 = 0}{\iff} c_0 = 0$$

und damit

$$f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

ergibt.

20. Zu betrachten ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & y_1' & = & y_1 & + & y_2 \\ \text{(II)} & y_2' & = & y_2 & + & 1 \end{array}$$

mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 1$. Die zweite Gleichung (II) ist dabei die inhomogene lineare Differentialgleichung $y_2' = a(x)\, y_2 + b_2(x)$ mit den konstanten Funktionen

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a(x) = 1, \qquad \text{und} \qquad b_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b_2(x) = 1.$$

Da $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A(x) = x$, eine Stammfunktion von a ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\, e^{A(x)} = c\, e^x,$$

mit $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y_2' = y_2$ dar; ferner ist offensichtlich die konstante Funktion

$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = -1,$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung $y_2' = y_2 + 1$. Damit ist

$$y_2 = \varphi_c + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y_2(x) = c\, e^x - 1,$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, und wegen

$$y_2(0) = 1 \iff c\, e^0 - 1 = 1 \iff c = 2$$

erhalten wir

$$y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y_2(x) = 2\, e^x - 1.$$

Damit ist aber die erste Gleichung (I) die inhomogene lineare Differentialgleichung $y_1 = a(x)\, y_1 + b_1(x)$ mit

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a(x) = 1, \qquad \text{und} \qquad b_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b_2(x) = 2\, e^x - 1.$$

Wir wählen nun den Ansatz $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = u(x)\, e^x$, der Variation der Konstanten mit einer differenzierbaren Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wegen

$$\varphi_1'(x) = u'(x)\, e^x + u(x) \cdot e^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist φ_1 genau dann Lösung von $y_1' = a(x)\, y_1 + b(x)$, wenn

$$u'(x)\, e^x + u(x)\, e^x = 1 \cdot u(x)\, e^x + (2\, e^x - 1)\,,$$

also

$$u'(x) = (2\, e^x - 1) \cdot e^{-x} = 2 - e^{-x},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Demnach ist

$$u(x) = 2\, x + e^{-x} + d$$

für eine Konstante $d \in \mathbb{R}$ und damit

$$\varphi_1(x) = u(x)\, e^x = \big(2\,x + e^{-x} + d\big)\, e^x = (2\,x + d)\, e^x + 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; wegen

$$y_1(0) = 1 \iff (2 \cdot 0 + d)\, e^0 + 1 = 1 \iff d = 0$$

erhalten wir

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = 2\,x\,e^x + 1.$$

Zusammenfassend erhalten wir die Lösung

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x\,e^x + 1 \\ 2\,e^x - 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$