MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 4
03.11.2014

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Bearbeitungsvorschlag —

13. a) Die gegebene Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{y^2} - \frac{y^2}{16},$$

mit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}$$

ist (als gebrochenrationale Funktion) beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in D$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) = -\frac{1}{x^2} + x^2 \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{2}{y^3} - \frac{y}{8}$$

sowie

$$\partial_1\partial_1 f(x,y) = \frac{2}{x^3} + 2\,x \qquad \text{und} \qquad \partial_2\partial_2 f(x,y) = -\frac{6}{y^4} - \frac{1}{8}$$

und

$$\partial_2\partial_1 f(x,y) = 0 = \partial_1\partial_2 f(x,y),$$

also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(-\frac{1}{x^2} + x^2,\ \frac{2}{y^3} - \frac{y}{8}\right)$$

und

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} + 2\,x & 0 \\ 0 & -\frac{6}{y^4} - \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Für eine kritische Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ von f gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$; wegen

$$\partial_1 f(x,y) = 0 \iff x^2 = \frac{1}{x^2} \iff x^4 = 1 \iff x = \pm 1$$

und

$$\partial_2 f(x,y) = 0 \iff \frac{y}{8} = \frac{2}{y^3} \iff y^4 = 16 \iff y = \pm 2$$

kommen als lokale Extrema von f nur die vier Punkte $(1,2)$ und $(1,-2)$ sowie $(-1,2)$ und $(-1,-2)$ in Frage:

- Es gilt

$$\operatorname{grad} f(1,\pm 2) = (0,0) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f(1,\pm 2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

  und wegen $\det(\operatorname{Hess} f(1,\pm 2)) = -2 < 0$ ist $\operatorname{Hess} f(1,\pm 2)$ indefinit; damit besitzt f in $(1,\pm 2)$ Sattelpunkte, also keine lokalen Extrema.
- Es gilt

$$\operatorname{grad} f(-1,\pm 2) = (0,0) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f(-1,\pm 2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

  damit besitzt $\operatorname{Hess} f(-1,\pm 2)$ die beiden negativen Eigenwerte -4 und $-\frac{1}{2}$ und ist folglich negativ definit. Daher besitzt f in $(-1,\pm 2)$ (isolierte) lokale Maxima.

Folglich besitzt die Funktion f genau zwei lokale Extrema, nämlich die beiden (isolierten) lokalen Maxima in den Punkten $(-1,\pm 2)$.

b) Wir betrachten das Verhalten von der Funktion f auf der Winkelhalbierenden $\{(t,t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ des 1. Quadranten und erhalten

$$f(t,t) = \frac{1}{t} + \frac{t^3}{3} - \frac{1}{t^2} - \frac{t^2}{16} = \underbrace{t^3}_{\to\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{1}{t^4}}_{\to 0} + \frac{1}{3} - \underbrace{\frac{1}{t^5}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{16\,t^2}}_{\to 0} \Bigg) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty;$$

damit ist f nicht nach oben beschränkt.

14. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 2\,x^2 + y^2 - x\,y^2,$$

ist (als Polynomfunktion) zweimal stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) = 4\,x - y^2 \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y) = 2\,y - 2\,x\,y$$

sowie

$$\partial_1\partial_1 f(x,y) = 4 \qquad \text{und} \qquad \partial_2\partial_2 f(x,y) = 2 - 2\,x$$

und

$$\partial_2\partial_1 f(x,y) = -2\,y = \partial_1\partial_2 f(x,y),$$

also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \big(4\,x - y^2,\ 2\,y - 2\,x\,y\big)$$

und

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -2\,y \\ -2\,y & 2 - 2\,x \end{pmatrix}.$$

Für eine kritische Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ von f gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$, also

$$4\,x - y^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad 2\,y - 2\,x\,y = 0;$$

wegen

$$2\,y - 2\,x\,y = 0 \iff 2\,y\,(1-x) = 0 \iff y = 0 \quad \text{oder} \quad x = 1$$

sowie

- im Falle $y = 0$

$$4\,x - y^2 = 0 \iff 4\,x = 0 \iff x = 0$$

- und im Falle $x = 1$

$$4\,x - y^2 = 0 \iff 4 - y^2 = 0 \iff y^2 = 4 \iff y = \pm 2$$

besitzt f genau die drei kritischen Stellen $(0,0)$ sowie $(1,2)$ und $(1,-2)$; nur diese kommen als lokale Extrema von f in Frage:

- Es gilt

$$\operatorname{grad} f\,(0,0) = (0,0) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f\,(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

  damit besitzt $\operatorname{Hess} f\,(0,0)$ die beiden positiven Eigenwerte 4 und 2 und ist folglich positiv definit. Daher besitzt f in $(0,0)$ ein lokales Minimum.

- Es gilt

$$\operatorname{grad} f\,(1,2) = (0,0) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f\,(1,2) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix};$$

  damit besitzt $\operatorname{Hess} f\,(1,2)$ die negative Determinante -16 und ist folglich indefinit. Daher besitzt f in $(1,2)$ einen Sattelpunkt, insbesondere also kein lokales Extremum.

- Es gilt

$$\operatorname{grad} f\,(1,-2) = (0,0) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f\,(1,-2) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix};$$

  damit besitzt $\operatorname{Hess} f\,(1,-2)$ die negative Determinante -16 und ist folglich indefinit. Daher besitzt f in $(1,-2)$ einen Sattelpunkt, insbesondere also kein lokales Extremum.

Damit besitzt f genau ein lokales Extremum, nämlich ein lokales Minimum in $(0,0)$.

b) Wegen

$$f(0,t) = 2 \cdot 0^2 + t^2 - 0 \cdot t^2 = t^2 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

ist f nicht nach oben beschränkt, besitzt also insbesondere kein globales Maximum, und wegen

$$f(2,t) = 2 \cdot 2^2 + t^2 - 2 \cdot t^2 = 8 - t^2 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

ist f nicht nach unten beschränkt, besitzt also insbesondere kein globales Minimum.

15. Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^y - y^x = e^{y \ln x} - e^{x \ln y},$$

ist (als Differenz sowie Produkt und Komposition einer linearen Funktion sowie der Exponentialfunktionen und des natürlichen Logarithmus) selbst beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) = e^{y \ln x} \cdot \frac{y}{x} - e^{x \ln y} \cdot \ln y$$

und

$$\partial_2 f(x,y) = e^{y \ln x} \cdot \ln x - e^{x \ln y} \cdot \frac{x}{y};$$

wegen

$$\partial_1 f(e,e) = e^{e \ln e} \cdot \frac{e}{e} - e^{e \ln e} \cdot \ln e = e^e \cdot 1 - e^e \cdot 1 = 0$$

und

$$\partial_2 f(e,e) = e^{e \ln e} \cdot \ln e - e^{e \ln e} \cdot \frac{e}{e} = e^e \cdot 1 - e^e \cdot 1 = 0,$$

also $\operatorname{grad} f(e,e) = (0,0)$, ist (e,e) ein kritischer Punkt von f. Ferner gilt

$$\partial_1 \partial_1 f(x,y) = \left(\left(e^{y \ln x} \cdot \frac{y}{x} \right) \cdot \frac{y}{x} + e^{y \ln x} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) \right) - e^{x \ln y} \cdot (\ln y)^2$$

und

$$\partial_2 \partial_2 f(x,y) = e^{y \ln x} \cdot (\ln x)^2 - \left(\left(e^{x \ln y} \cdot \frac{x}{y} \right) \cdot \frac{x}{y} + e^{x \ln y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) \right)$$

sowie

$$\begin{aligned} \partial_2 \partial_1 f(x,y) = {} & \left(\left(e^{y \ln x} \cdot \ln x \right) \cdot \frac{y}{x} + e^{y \ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) - \\ & - \left(\left(e^{x \ln y} \cdot \frac{x}{y} \right) \cdot \ln y + e^{x \ln y} \cdot \frac{1}{y} \right) = \partial_1 \partial_2 f(x,y) \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Wegen

$$\partial_1 \partial_1 f(e,e) = \left(\left(e^{e \ln e} \cdot \frac{e}{e} \right) \cdot \frac{e}{e} + e^{e \ln e} \cdot \left(-\frac{e}{e^2} \right) \right) - e^{e \ln e} \cdot (\ln e)^2 = -e^{e-1}$$

und

$$\partial_2 \partial_2 f(e,e) = e^{e \ln e} \cdot (\ln e)^2 - \left(\left(e^{e \ln e} \cdot \frac{e}{e} \right) \cdot \frac{e}{e} + e^{e \ln e} \cdot \left(-\frac{e}{e^2} \right) \right) = e^{e-1}$$

sowie

$$\begin{aligned} & \partial_1 \partial_2 f(e,e) = \partial_2 \partial_1 f(e,e) = \\ & \quad = \left(\left(e^{e \ln e} \cdot \ln e \right) \cdot \frac{e}{e} + e^{e \ln e} \cdot \frac{1}{e} \right) - \left(\left(e^{e \ln e} \cdot \frac{e}{e} \right) \cdot \ln e + e^{e \ln e} \cdot \frac{1}{e} \right) = 0 \end{aligned}$$

besitzt die Hessematrix von f im Punkt (e,e) die Diagonalgestalt

$$\operatorname{Hess} f(e,e) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(e,e) & \partial_1\partial_2 f(e,e) \\ \partial_2\partial_1 f(e,e) & \partial_2\partial_2 f(e,e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{e-1} & 0 \\ 0 & e^{e-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

mit dem positiven Eigenwert e^{e-1} und dem negativen Eigenwert $-e^{e-1}$; folglich ist $\operatorname{Hess} f(e,e)$ indefinit, und f besitzt in (e,e) einen Sattelpunkt, insbesondere also weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

16. a) Die Nullstellenmenge N_f der gegebenen Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2\left(x^2+y^2-2\right),$$

besteht wegen

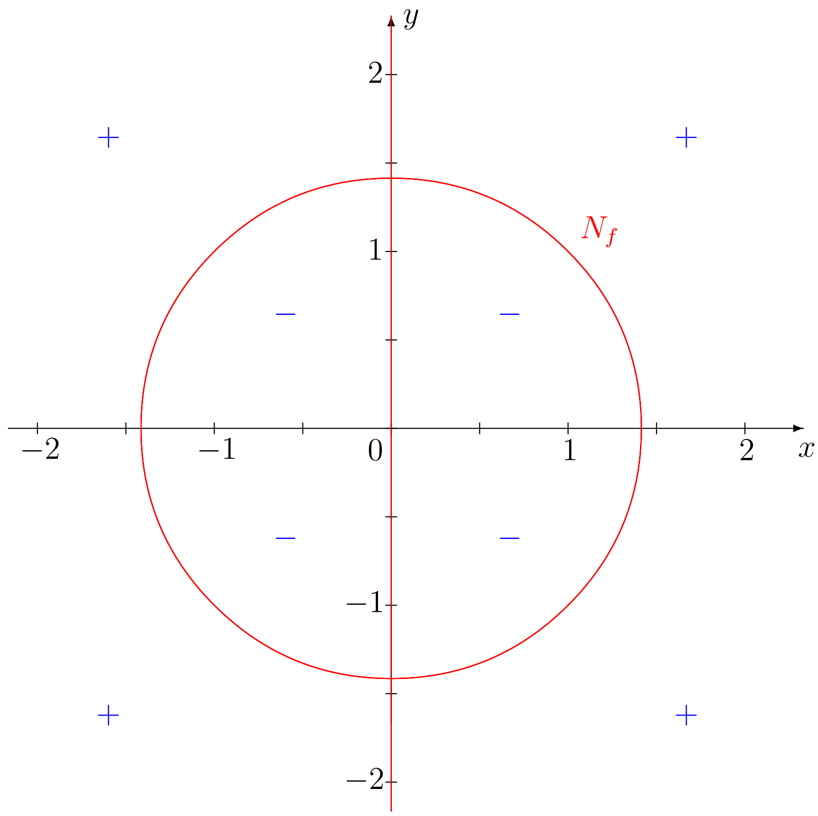
$$f(x,y) = 0 \iff x^2\left(x^2+y^2-2\right) = 0 \iff$$
$$\iff x^2 = 0 \text{ oder } x^2+y^2-2 = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x^2+y^2 = 2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genau aus der y–Achse $x = 0$ und aus der Kreislinie $x^2+y^2 = 2$ um den Ursprung mit Radius $r = \sqrt{2}$. Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus N_f$ gilt $x \neq 0$, also $x^2 > 0$, und damit

$$f(x,y) > 0 \iff x^2\left(x^2+y^2-2\right) > 0 \iff$$
$$\iff x^2+y^2-2 > 0 \iff x^2+y^2 > 2$$

sowie

$$f(x,y) < 0 \iff x^2\left(x^2+y^2-2\right) < 0 \iff$$
$$\iff x^2+y^2-2 < 0 \iff x^2+y^2 < 2.$$



b) Die Funktion f ist (als Polynomfunktion) beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt wegen

$$f(x, y) = x^2 \left(x^2 + y^2 - 2\right) = x^4 + x^2y^2 - 2x^2$$

zum einen

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \left(4x^3 + 2xy^2 - 4x,\ 2x^2y\right)$$

und zum anderen

$$\operatorname{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2y^2 - 4 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Damit kommen als lokale Extremstellen von f lediglich die kritischen Stellen von f, also die Nullstellen von $\operatorname{grad} f$ in Frage: für alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a = 0$ ist $\operatorname{grad} f(a, b) = (0, 0)$, und für alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(a, b) = (0, 0) \quad &\Longleftrightarrow \quad 4a^3 + 2ab^2 - 4a = 0 \ \text{ und } \ 2a^2b = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2a^2 + b^2 - 2 = 0 \ \text{ und } \ b = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a^2 = 1 \ \text{ und } \ b = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (a, b) = (\pm 1, 0)\,. \end{aligned}$$

Gemäß der Skizze von a) ergibt sich dabei für alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a = 0$:

- Für $|b| < \sqrt{2}$ ist $r = \sqrt{2} - |b| > 0$, und für alle $(x, y) \in K_r(0, b)$ gilt $f(x, y) \leq 0 = f(0, b)$; damit besitzt f in $(0, b)$ ein lokales Maximum.
- Für $|b| > \sqrt{2}$ ist $r = |b| - \sqrt{2} > 0$, und für alle $(x, y) \in K_r(0, b)$ gilt $f(x, y) \geq 0 = f(0, b)$; damit besitzt f in $(0, b)$ ein lokales Minimum.
- Für $|b| = \sqrt{2}$ gibt es für jedes $r > 0$ in $K_r(0, b)$ Punkte (x', y') mit $f(x', y') < 0 = f(0, b)$ und Punkte (x'', y'') mit $f(x'', y'') > 0 = f(0, b)$; damit besitzt f in $(0, b)$ kein Extremum.

Des weiteren besitzt

$$\operatorname{Hess} f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

zwei positive Eigenwerte und ist damit positiv definit; folglich besitzt f in $(\pm 1, 0)$ isolierte lokale Minima.