

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Bearbeitungsvorschlag —

9. Die (als Produkt und Komposition von Polynomfunktionen und der Exponentialfunktion insbesondere) stetige Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-x^2 + 1),$$

besitzt auf der kompakten Einheitskreisscheibe

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

nach dem Satz von Weierstraß mindestens ein globales Minimum und mindestens ein globales Maximum, es gibt also (a, b) und $(c, d) \in D$ mit

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d)$$

für alle $(x, y) \in D$; für die Lage dieser Extremstellen $(p, q) \in D$ gibt es die folgenden beiden Möglichkeiten:

- (p, q) liegt auf dem Rand von D , also auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$ um $(0, 0)$ mit Radius 1; wegen

$$f(p, q) = e^{-(p^2+q^2)} \cdot (-p^2 + 1) = e^{-1} \cdot q^2$$

kommen hier nur $q = 0$ mit $p = \pm 1$, also $(\pm 1, 0)$, sowie $q = \pm 1$ mit $p = 0$, also $(0, \pm 1)$ in Frage.

- (p, q) liegt im Innern von D , also in der offenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 < 1$; da aber f partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= \left(e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) \right) \cdot (-x^2 + 1) + e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) \\ &= -2x \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot (2 - x^2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_2 f(x, y) &= \left(e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y) \right) \cdot (-x^2 + 1) \\ &= -2y \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot (1 - x^2) \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist, muß (p, q) dann eine kritische Stelle von f sein, so daß wegen

$$\partial_1 f(p, q) = 0 \iff -2p \cdot \underbrace{e^{-(p^2+q^2)}}_{>0} \cdot \underbrace{(2-p^2)}_{>0} \iff p = 0$$

und

$$\partial_2 f(p, q) = 0 \iff -2q \cdot \underbrace{e^{-(p^2+q^2)}}_{>0} \cdot \underbrace{(1-q^2)}_{>0} \iff q = 0$$

kommt hier für (p, q) nur der Punkt $(0, 0)$ in Frage.

Der Vergleich der Funktionswerte

(p, q)	$(1, 0)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(0, -1)$	$(0, 0)$
$f(p, q)$	0	0	e^{-1}	e^{-1}	1

zeigt, daß die Funktion f im Punkt $(0, 0)$ ihr Maximum 1 sowie in den Punkten $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ ihr Minimum 0 annimmt.

10. Die (als Polynomfunktion insbesondere) stetige Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + 4y^3 - 3x - 3y,$$

besitzt auf der sowohl abgeschlossenen als auch beschränkten und damit kompakten Teilmenge

$$Q = [-1, 1] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$$

nach dem Satz von Weierstraß (mindestens) eine globale Minimalstelle und (mindestens) eine globale Maximalstelle.

Da die Funktion f darüber hinaus partiell differenzierbar ist, wobei

$$\partial_1 f(x, y) = 3x^2 - 3 \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x, y) = 12y^2 - 3$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und damit insbesondere

$$\partial_1 f(x, y) = 3(x^2 - 1) < 0$$

für alle Punkte $(x, y) \in \overset{\circ}{Q}$ im Innern $\overset{\circ}{Q} =]-1, 1[\times]-1, 1[$ von Q gilt, kommen für globale Extremstellen $(a, b) \in Q$ von f nur Punkte (a, b) auf dem Rand ∂Q des Quadrats Q in Frage:

- Für die Punkte $(-1, t)$ mit $t \in [-1, 1]$ der linken bzw. $(1, t)$ mit $t \in [-1, 1]$ der rechten Quadratseite gilt

$$f(\pm 1, t) = (\pm 1)^3 + 4t^3 - 3 \cdot (\pm 1) - 3t = 4t^3 - 3t \mp 2;$$

da die (als Polynomfunktion insbesondere differenzierbare) Hilfsfunktion

$$h_1 : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_1(t) = 4t^3 - 3t \mp 2,$$

ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 1$, sowie in den Nullstellen ihrer Ableitung

$$h_1'(t) = 12t^2 - 3 = 12 \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) = 12 \left(t + \frac{1}{2} \right) \left(t - \frac{1}{2} \right),$$

also in $t = -\frac{1}{2}$ und $t = \frac{1}{2}$ annehmen kann, kommen für (a, b) nur die Punkte $(\pm 1, -1)$, $(\pm 1, -\frac{1}{2})$, $(\pm 1, \frac{1}{2})$ und $(\pm 1, 1)$ in Frage.

- Für die Punkte $(t, -1)$ mit $t \in [-1, 1]$ der unteren bzw. $(t, 1)$ mit $t \in [-1, 1]$ der oberen Quadratseite gilt

$$f(t, \pm 1) = t^3 + 4 \cdot (\pm 1)^3 - 3t - 3 \cdot (\pm 1) = t^3 - 3t \pm 1;$$

da die (als Polynomfunktion insbesondere differenzierbare) Hilfsfunktion

$$h_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = t^3 - 3t \pm 1,$$

ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 1$, die hier mit den Nullstellen ihrer Ableitung

$$h_2'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2 - 1) = 3(t + 1)(t - 1),$$

zusammenfallen, annehmen kann, kommen für (a, b) nur die Punkte $(-1, \pm 1)$ und $(1, \pm 1)$ in Frage.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(a, b)	$(-1, -1)$	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(-1, \frac{1}{2})$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	$(1, -\frac{1}{2})$	$(1, \frac{1}{2})$	$(1, 1)$
$f(a, b)$	1	3	1	3	-3	-1	-3	-1

erkennt man, daß f den maximalen Funktionswert 3 in den Punkten $(-1, -\frac{1}{2})$ und $(-1, 1)$ sowie den minimalen Funktionswert -3 in den Punkten $(1, -1)$ und $(1, \frac{1}{2})$ annimmt.

11. Die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y - 1 \leq 0\}$$

ist das von den Geraden $x = 0$, $y = 0$ und $y = 1 - x$ begrenzte abgeschlossene Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ und damit insbesondere eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Folglich besitzt die (als Polynomfunktion) insbesondere stetige Funktion

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x y (x + y - 1),$$

nach dem Satz von Weierstraß auf dem Kompaktum M (mindestens) ein globales Minimum und (mindestens) ein globales Maximum. Dabei gilt für alle $(x, y) \in M$

$$f(x, y) = \underbrace{x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{y}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x + y - 1)}_{\leq 0} \leq 0$$

mit

$$f(x, y) = 0 \iff x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad y = 1 - x;$$

folglich besitzt die Funktion f genau in den Randpunkten von M ihre globalen Maximalstellen, und es gilt

$$\sup f(M) = 0.$$

Eine globale Minimalstelle $(p, q) \in M$ von f muß demnach im Innern

$$\overset{\circ}{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y - 1 < 0\}$$

des Dreiecks M liegen; da f (als Polynomfunktion) insbesondere partiell differenzierbar ist, kommen dabei hierfür nur kritische Stellen von f in Frage. Für alle $(x, y) \in \overset{\circ}{M}$ gilt

$$f(x, y) = x y (x + y - 1) = x^2 y + x y^2 - x y$$

und damit

$$\partial_1 f(x, y) = 2 x y + y^2 - y \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x, y) = x^2 + 2 x y - x,$$

weswegen wir

$$\partial_1 f(x, y) = 0 \iff (2 x + y - 1) y = 0 \underset{y>0}{\iff} 2 x + y = 1$$

und

$$\partial_2 f(x, y) = 0 \iff (x + 2 y - 1) x = 0 \underset{x>0}{\iff} x + 2 y = 1$$

erhalten. Für ein globales Minimum $(p, q) \in M$ von f muß also

$$\text{sowohl} \quad 2 p + q = 1 \quad \text{als auch} \quad p + 2 q = 1,$$

also $p = 1 - 2 q$ und damit $2(1 - 2 q) + q = 1$ bzw. $2 - 3 q = 1$, und schließlich $q = \frac{1}{3}$ und $p = \frac{1}{3}$ gelten; somit ergibt sich

$$\inf f(M) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}.$$

12. a) Die gegebene Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

ist zunächst für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ partiell differenzierbar, und aus

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}$$

ergibt sich mit der Quotientenregel

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x_1, x_2) &= \frac{(x_1^2 + x_2^2)(3x_1^2 x_2 - x_2^3) - (x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3)(2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= \frac{(3x_1^4 x_2 - x_1^2 x_2^3 + 3x_1^2 x_2^3 - x_2^5) - (2x_1^4 x_2 - 2x_1^2 x_2^3)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= \frac{x_1^4 x_2 + 4x_1^2 x_2^3 - x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\end{aligned}$$

sowie entsprechend

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = \frac{x_1^5 - 4x_1^3 x_2^2 - x_1 x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Ferner sind die beiden Funktionen

$$g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_1(x_1) = f(x_1, 0) = 0,$$

und

$$g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_2(x_2) = f(0, x_2) = 0,$$

differenzierbar, und es ergibt sich

$$\partial_1 f(0, 0) = g_1'(0) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_2 f(0, 0) = g_2'(0) = 0.$$

b) Die beiden partiellen Ableitungen

$$\partial_1 f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \partial_1 f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^4 x_2 + 4x_1^2 x_2^3 - x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

und

$$\partial_2 f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \partial_2 f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^5 - 4x_1^3 x_2^2 - x_1 x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

sind zunächst für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ partiell differenzierbar. Wegen

$$\frac{\partial_1 f(x_1, 0) - \partial_1 f(0, 0)}{x_1 - 0} = \frac{0 - 0}{x_1} = 0 \xrightarrow{x_1 \rightarrow 0} 0$$

und

$$\frac{\partial_1 f(0, x_2) - \partial_1 f(0, 0)}{x_2 - 0} = \frac{-x_2 - 0}{x_2} = -1 \xrightarrow{x_2 \rightarrow 0} -1$$

ergibt sich

$$\partial_1 \partial_1 f(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_2 \partial_1 f(0, 0) = -1,$$

und wegen

$$\frac{\partial_2 f(x_1, 0) - \partial_2 f(0, 0)}{x_1 - 0} = \frac{x_1 - 0}{x_1} = 1 \xrightarrow{x_1 \rightarrow 0} 1$$

und

$$\frac{\partial_2 f(0, x_2) - \partial_2 f(0, 0)}{x_2 - 0} = \frac{0 - 0}{x_2} = 0 \xrightarrow{x_2 \rightarrow 0} 0$$

ergibt sich

$$\partial_1 \partial_2 f(0, 0) = 1 \quad \text{und} \quad \partial_2 \partial_2 f(0, 0) = 0;$$

insbesondere gilt

$$\partial_1 \partial_2 f(0, 0) = 1 \neq -1 = \partial_2 \partial_1 f(0, 0).$$

c) Für alle $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x_1, x_2) - f(0, 0)| &= \left| x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - 0 \right| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \frac{|x_1^2 - x_2^2|}{x_1^2 + x_2^2} \leq \\ &\leq |x_1| \cdot |x_2| \cdot \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = \underbrace{|x_1|}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{|x_2|}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} 0; \end{aligned}$$

damit gilt

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} f(x_1, x_2) = 0 = f(0, 0),$$

also ist f stetig an der Stelle $(0, 0)$.