

**Tutorium zur Vorlesung  
„Mathematik im Querschnitt“  
— Bearbeitungsvorschlag —**

5. a) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2)^3,$$

ist partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = 3(2x_1 - x_2)^2 \cdot 2 = 6(2x_1 - x_2)^2$$

und

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = 3(2x_1 - x_2)^2 \cdot (-1) = -3(2x_1 - x_2)^2$$

für alle  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

b) Die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2,$$

ist partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 g(x_1, x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2$$

und

$$\partial_2 g(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot (-\sin x_2) = -\sin x_1 \cdot \sin x_2$$

für alle  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

c) Die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = (x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2) e^{x_1^2 + x_2^2},$$

ist partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \partial_1 h(x_1, x_2) &= (2x_1 + 10x_2) \cdot e^{x_1^2 + x_2^2} + (x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2) \cdot \left( e^{x_1^2 + x_2^2} \cdot (2x_1) \right) = \\ &= (2x_1 + 10x_2 + 2x_1^3 + 20x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2) e^{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_2 h(x_1, x_2) &= (10x_1 + 2x_2) \cdot e^{x_1^2 + x_2^2} + (x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2) \cdot \left( e^{x_1^2 + x_2^2} \cdot (2x_2) \right) = \\ &= (10x_1 + 2x_2 + 2x_1^2x_2 + 20x_1x_2^2 + 2x_2^3) e^{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

für alle  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

- d) Die Wurzelfunktion  $w : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w(t) = \sqrt{t}$ , ist auf  $\mathbb{R}^+$  differenzierbar; damit ist die Funktion

$$k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad k(x_1, x_2) = x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

zumindest für alle  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$  partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 k(x_1, x_2) = x_2 \cdot \left( \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (2x_1) \right) = \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

und

$$\partial_2 k(x_1, x_2) = 1 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_2 \cdot \left( \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (2x_2) \right) = \frac{x_1^2 + 2x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Darüber hinaus ist die Funktion

$$k_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad k_1(x_1) = k(x_1, 0) = 0,$$

differenzierbar, insbesondere für  $a_1 = 0$  gilt dann  $\partial_1 k(0, 0) = k'_1(0) = 0$ ; die Funktion

$$k_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad k_2(x_2) = k(0, x_2) = x_2 \sqrt{x_2^2} = x_2 |x_2|,$$

ist wegen

$$\frac{k_2(x_2) - k_2(0)}{x_2 - 0} = \frac{x_2 |x_2|}{x_2} = |x_2| \xrightarrow{x_2 \rightarrow 0} 0$$

im Punkt  $a_2 = 0$  differenzierbar mit  $\partial_2 k(0, 0) = k'_2(0) = 0$ .

6. Wir betrachten für die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \sin x \cdot \arctan \left( \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

ihren Differenzenquotienten im Punkt  $a = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$  in  $x$ -Richtung

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{\sin h \cdot \arctan \left( \ln \frac{1}{\sqrt{h^2 + 0^2}} \right)}{h} = \frac{\sin h}{h} \cdot \arctan \left( \ln \frac{1}{|h|} \right)$$

für alle  $h \neq 0$  und untersuchen, ob sein Grenzwert für  $h \rightarrow 0$  existiert. Der erste Faktor läßt sich mit der Regel von de l'Hospital behandeln, und es ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h}{1} = \frac{1}{1} = 1;$$

für den zweiten Faktor ergibt sich direkt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\arctan \left( \underbrace{\ln \frac{1}{|h|}}_{\rightarrow \infty} \right)}_{\rightarrow \infty} = \frac{\pi}{2},$$

so daß man insgesamt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\arctan \left( \ln \frac{1}{|h|} \right)}_{\rightarrow \frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi}{2}$$

erhält. Folglich existiert die partielle Ableitung von  $f$  nach der 1. Variablen im Punkt  $(0, 0)$ , und es gilt

$$\partial_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{\pi}{2}.$$

## 7. Das Rechteck

$$D = [-1, 1] \times [0, 2\pi]$$

ist eine sowohl abgeschlossene als auch beschränkte und damit kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ ; darüber hinaus ist die Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + e^x \cos y,$$

als Summe und Produkt einer linearen Funktion sowie der Exponentialfunktion und des Cosinus insbesondere stetig. Nach dem Satz von Weierstraß besitzt damit die stetige Funktion  $f$  auf der kompakten Menge  $D$  (mindestens) eine globale Minimalstelle und (mindestens) eine globale Maximalstelle.

Da die Funktion  $f$  darüber hinaus partiell differenzierbar ist, wobei

$$\partial_1 f(x, y) = 1 + e^x \cos y \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x, y) = -e^x \sin y$$

für alle  $(x, y) \in D$  gilt, kommen für globale Extremstellen  $(a, b) \in D$  von  $f$  nur die beiden Fälle in Frage:

- Der Punkt  $(a, b)$  liegt auf dem Rand  $\partial D$  von  $D$ ; wir betrachten die vier Rechtecksseiten und greifen dabei auf bekannte Eigenschaften der Exponentialfunktion sowie des Cosinus zurück:

- Für die Punkte  $(-1, t)$  mit  $t \in [0, 2\pi]$  der linken Rechtecksseite gilt

$$f(-1, t) = -1 + e^{-1} \cos t;$$

damit kommen für  $(a, b)$  nur die Punkte  $(-1, 0)$ ,  $(-1, \pi)$  und  $(-1, 2\pi)$  in Frage.

- Für die Punkte  $(1, t)$  mit  $t \in [0, 2\pi]$  der rechten Rechtecksseite gilt

$$f(1, t) = 1 + e \cos t;$$

damit kommen für  $(a, b)$  nur die Punkte  $(1, 0)$ ,  $(1, \pi)$  und  $(1, 2\pi)$  in Frage.

- Für die Punkte  $(t, 0)$  bzw.  $(t, 2\pi)$  mit  $t \in [-1, 1]$  der unteren bzw. oberen Rechtecksseite gilt

$$f(t, 0) = t + e^t = f(t, 2\pi);$$

da dieser Ausdruck in  $t$  streng monoton wachsend ist, kommen für  $(a, b)$  nur die Punkte  $(-1, 0)$  und  $(1, 0)$  bzw.  $(-1, 2\pi)$  und  $(1, 2\pi)$  in Frage.

- Der Punkt  $(a, b)$  liegt im Innern

$$\overset{\circ}{D} = ]-1, 1[ \times ]0, 2\pi[$$

von  $D$ ; dann ist aber  $(a, b)$  schon ein kritischer Punkt von  $f$ , es gilt also  $\text{grad } f(a, b) = (0, 0)$ . Aus

$$\partial_2 f(a, b) = -e^a \sin b = 0$$

folgt zunächst  $\sin b = 0$ , also  $b = \pi$ , woraus sich mit

$$\partial_1 f(a, b) = 1 + e^a \cos b \underset{b=\pi}{=} 1 - e^a = 0$$

dann  $e^a = 1$ , also  $a = 0$ , ergibt; hier ist damit  $(a, b) = (0, \pi)$ .

Mit Hilfe der Wertetabelle

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} (a, b) & (-1, 0) & (-1, \pi) & (-1, 2\pi) & (1, 0) & (1, \pi) & (1, 2\pi) & (0, \pi) \\ \hline f(a, b) & -1 + \frac{1}{e} & -1 - \frac{1}{e} & -1 + \frac{1}{e} & 1 + e & 1 - e & 1 + e & -1 \end{array}$$

erkennt man wegen

$$1 - e < -1 - \frac{1}{e} < -1 < -1 + \frac{1}{e} < 1 + e,$$

daß  $f$  in  $(1, \pi)$  eine globale Minimalstelle sowie in  $(1, 0)$  und  $(1, 2\pi)$  globale Maximalstellen besitzt.

8. Die Betragsfunktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(t) = |t|$ , ist auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  differenzierbar; damit ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = |x - y| \cdot y,$$

zunächst an allen Stellen  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  mit  $a \neq b$  partiell differenzierbar. Es bleiben also nur noch die Punkte  $(a, a)$  mit  $a \in \mathbb{R}$  der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten zu untersuchen:

- Für den Differenzenquotienten der Funktion

$$g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_1(x) = f(x, a) = |x - a| \cdot a,$$

an der Stelle  $x = a$  gilt

$$\frac{g_1(a+h) - g_1(a)}{h} = \frac{f(a+h, a) - f(a, a)}{h} = \frac{|h| \cdot a - 0}{h} = \frac{|h|}{h} \cdot a$$

für alle  $h \neq 0$ . Wegen

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g_1(a+h) - g_1(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} \cdot a \stackrel{h>0}{=} a$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g_1(a+h) - g_1(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} \cdot a \stackrel{h<0}{=} -a$$

ist  $g_1$  an der Stelle  $x = a$  genau dann differenzierbar, wenn  $a = -a$  gilt,  $\partial_1 f(a, a)$  existiert also genau im Falle  $a = 0$ .

- Für den Differenzenquotienten der Funktion

$$g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_2(y) = f(a, y) = |a - y| \cdot y,$$

an der Stelle  $y = a$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{g_2(a+h) - g_2(a)}{h} &= \frac{f(a, a+h) - f(a, a)}{h} = \\ &= \frac{|-h| \cdot (a+h) - 0}{h} = \frac{|h|}{h} \cdot (a+h) \end{aligned}$$

für alle  $h \neq 0$ . Wegen

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g_2(a+h) - g_2(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} \cdot (a+h) \stackrel{h>0}{=} a$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g_2(a+h) - g_2(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} \cdot (a+h) \stackrel{h<0}{=} -a$$

ist  $g_2$  an der Stelle  $y = a$  genau dann differenzierbar, wenn  $a = -a$  gilt,  $\partial_2 f(a, a)$  existiert also genau im Falle  $a = 0$ .

Damit ist die Funktion  $f$  an denen vom Nullpunkt  $(0, 0)$  verschiedenen Punkten der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten nicht partiell differenzierbar.