MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 1
13.10.2014

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Bearbeitungsvorschlag —

1. a) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1 \cdot |x_1 - x_2|,$$

ist als Produkt und Verkettung von Polynomfunktionen sowie der Betragsfunktion selbst stetig; genauer gilt: die beiden Polynomfunktionen

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x_1, x_2) = x_1, \quad \text{und} \quad f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2,$$

sind stetig, und wegen der Stetigkeit des Betrags $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(t) = |t|$, ist auch die Verknüpfung

$$f_4 = f_3 \circ f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_4(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|\,,$$

und damit schießlich das Produkt

$$f = f_1 \cdot f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1 \cdot |x_1 - x_2|,$$

stetig.

b) Die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2,$$

ist als Produkt und Verkettung von Monomfunktionen sowie des Sinus und des Cosinus selbst stetig; genauer gilt: die beiden Monomfunktionen

$$g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g_1(x_1, x_2) = x_1, \quad \text{und} \quad g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g_2(x_1, x_2) = x_2,$$

sind stetig, und wegen der Stetigkeit des Sinus sin sowie des Cosinus cos sind auch die Verknüpfungen

$$g_3 = \sin \circ g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g_3(x_1, x_2) = \sin x_1,$$

und

$$g_4 = \cos \circ f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g_4(x_1, x_2) = \cos x_2,$$

und damit schießlich das Produkt

$$g = g_3 \cdot g_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2,$$

stetig.

c) Die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1\, x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0), \end{cases}$$

ist zunächst an allen Stellen $a \neq (0, 0)$ als Quotient und Verkettung von Polynomfunktionen sowie der Wurzelfunktion selbst stetig. Darüber hinaus gilt für alle $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$ zunächst $x_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2$, also $|x_2| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, und damit

$$|h(x_1, x_2) - h(0, 0)| = \left| \frac{x_1\, x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right| = |x_1| \cdot \underbrace{\frac{|x_2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}_{\leq 1} \leq |x_1| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

und damit insbesondere $h(x) \to h(0)$ für $x \to 0$; also ist h auch an der Stelle $a = (0, 0)$ stetig.

d) Die Funktion

$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad k(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1\, \sin(x_1\, x_2)}{x_1^2+x_2^2}, & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

ist zunächst an allen Stellen $a \neq (0, 0)$ als Quotient und Verkettung von Polynomfunktionen sowie der Sinusfunktion selbst stetig. Darüber hinaus gilt für alle $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$ zunächst $|\sin(x_1\, x_2)| \leq |x_1\, x_2|$ und damit

$$\begin{aligned} |k(x_1, x_2) - k(0, 0)| &= \left| \frac{x_1\, \sin(x_1\, x_2)}{x_1^2 + x_2^2} \right| = \\ &= \frac{|x_1|}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \underbrace{|\sin(x_1\, x_2)|}_{\leq |x_1| \cdot |x_2|} \leq \underbrace{\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}}_{\leq 1} \cdot |x_2| \leq |x_2| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

und damit insbesondere $k(x) \to k(0)$ für $x \to 0$; also ist k auch an der Stelle $a = (0, 0)$ stetig.

2. a) Sei $s \in \mathbb{R}$. Für $t = 0$ ist $f_s(t) = f(0,\, 0) = 1$, und für $t \neq 0$ ist

$$f_s(t) = f(t,\, s\, t) = \exp\left(-\frac{(s\, t)^2}{t} \right) = \exp(-s^2\, t);$$

somit erhält man also einheitlich

$$f_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_s(t) = \exp(-s^2\, t).$$

Damit ist f_s als Verknüpfung der Exponentialfunktion exp und der linearen Funktion $h_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_s(t) = -s^2\, t$, insbesondere stetig.

b) Gemäß a) ist für jedes $s \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_s(t) = f(t, st)$, welche das Verhalten der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf den Punkten (t, st) der Ursprungsgeraden $y = s\,x$ mit der Steigung s beschreibt, stetig; dennoch erweist sich die Funktion f als nicht stetig an der Stelle $(0,0)$: wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

konvergiert die Punktfolge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad a_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2$$

gegen $(0,0)$; für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich aber

$$f(a_n) = f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \exp\left(-\frac{(\frac{1}{n})^2}{\frac{1}{n^2}}\right) = \exp\left(-\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right) = \exp(-1) = \frac{1}{e},$$

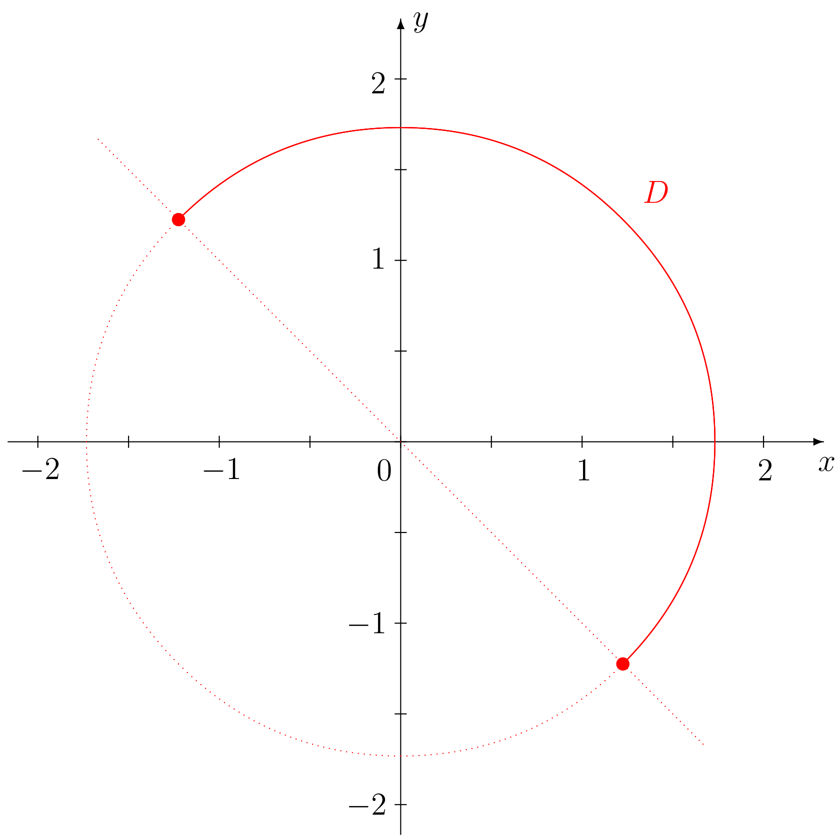
also

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \frac{1}{e} \neq 1 = f(0,0).$$

3. a) Die gegebene Menge

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0 \;\text{ und }\; x^2 + y^2 = 3\right\}$$

beinhaltet genau diejenigen Punkte der Kreislinie $x^2 + y^2 = 3$ mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius $\sqrt{3}$, die auf oder oberhalb der zweiten Winkelhalbierenden $y = -x$ liegen:



b) Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen und beschränkt, mithin kompakt, und die gegebene Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \exp(x+y),$$

ist als Komposition der Exponentialfunktion und einer linearen Funktion stetig; folglich nimmt die Funktion f nach dem Satz von Weierstraß ihr Maximum und ihr Minimum an.

c) Für einen Punkt $(x,y) \in D$ betrachten wir seine Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{3} \quad \text{und} \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$$

und erhalten

$$f(x,y) = f\left(\sqrt{3}\cos\varphi, \sqrt{3}\sin\varphi\right) = \exp\left(\sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi\right).$$

Die (als Komposition der Exponenentialfunktion und einer Linearkombination von Cosinus und Sinus) differenzierbare Hilfsfunktion

$$h : \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = \exp\left(\sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi\right),$$

kann ihre Extrema in den beiden Randpunkten $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ des Definitionsintervalls $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ sowie in den Nullstellen ihrer Ableitung h' mit

$$h'(\varphi) = \exp\left(\sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi\right) \cdot \left(-\sqrt{3}\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi\right)$$

für alle $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ annehmen; dabei gilt

$$\begin{aligned} &h'(\varphi) = 0 \iff \\ &\iff \underbrace{\exp\left(\sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi\right)}_{>0} \cdot \left(-\sqrt{3}\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi\right) = 0 \iff \\ &\iff -\sqrt{3}\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi = 0 \iff \cos\varphi = \sin\varphi \iff \varphi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Damit kommen als globale Extremstellen von f nur die Punkte $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ und $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ sowie $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ in Frage; die Wertetabelle

(x,y)	$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$
$f(x,y)$	1	1	$e^{\sqrt{6}}$

zeigt, daß die Funktion f ihr globales Maximum $e^{\sqrt{6}}$ im Punkt $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ sowie ihr globales Minimum 1 in den Punkten $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ und $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ annimmt.

4. Der Rand der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

ist die Kreislinie

$$\partial B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

um dem Mittelpunkt $(0, 0)$ mit dem Radius $r = 1$; wir wählen für $\partial B \subseteq B$ die Parametrisierung über die Kurve

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)\,.$$

Damit ist die Funktion

$$h = f \circ \varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$

als Verknüpfung der beiden stetigen Funktionen $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ und $f : B \to \mathbb{R}$ mit $W_\varphi = \partial B \subseteq D_f$ selbst stetig, und es gilt

$$h(0) = f(\varphi(0)) = f(1, 0) = 1 \qquad \text{und} \qquad h(2\pi) = f(\varphi(2\pi)) = f(1, 0) = 1$$

sowie

$$h(\pi) = f(\varphi(\pi)) = f(-1, 0) = -1.$$

Folglich besitzt die Funktion h nach dem Nullstellensatz eine Nullstelle $\xi_1 \in \,]0, \pi[$ und eine Nullstelle $\xi_2 \in \,]\pi, 2\pi[$; damit ist aber $p_1 = \varphi(\xi_1)$ ein Punkt von ∂B oberhalb der x–Achse mit

$$f(p_1) = f(\varphi(\xi_1)) = h(\xi_1) = 0$$

sowie $p_2 = \varphi(\xi_2)$ ein Punkt von ∂B unterhalb der x–Achse ebenfalls mit

$$f(p_2) = f(\varphi(\xi_2)) = h(\xi_2) = 0,$$

womit f auf dem Rand von B mindestens zwei voneinander verschiedene Nullstellen besitzt.