

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

37. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1996*). Man bestimme die metrische Normalform der Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 14x^2 - 4xy + 11y^2 - 28x + 4y + 13 = 0 \right\}$$

sowie ihren Mittelpunkt, die Hauptachsen und die Länge der Achsenabschnitte.

38. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010*). Man bestimme die euklidische Normalform des Kegelschnitts mit der Gleichung

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 7x^2 + 48xy - 7y^2 - 6x + 8y = 0 \right\}.$$

39. (*Klausuraufgabe Sommersemester 2003*). Gegeben seien die Geraden

$$g = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad h = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Man bestimme die Abstände $d(P, g)$ und $d(P, h)$ des Punktes $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ von g bzw. h .
- b) Man zeige: Die Menge aller Punkte P mit $d(P, g)^2 + d(P, h)^2 = 40$ ist genau die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 48x - 80y + 120 = 0 \right\}.$$

- c) Man zeige, daß Q eine Ellipse ist, und bestimme ihren Mittelpunkt, ihre Hauptachsen sowie die Länge ihrer Achsenabschnitte.

40. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2004*).

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ seien die Punkte $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ gegeben und in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, der Punkt $C = (t, t)$. Man bestimme in Abhängigkeit von t

- a) eine Gleichung für die Gerade durch A und C ;
- b) eine Gleichung für die Höhe h_B des Dreiecks ABC durch die Ecke B ;
- c) den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC .

Man zeige außerdem:

- d) Wenn t variiert, bewegt sich H auf einer Hyperbel.

Abgabe bis Dienstag, den 23. Dezember 2014, 10⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).