

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

33. a) Man bestimme die Gleichung einer Ellipse E , die die Scheitel $(\pm \frac{25}{2}; 0)$ besitzt und zudem den Punkt $(\frac{15}{2}; 6)$ enthält, und skizziere E .
b) Man bestimme die Gleichung einer Hyperbel H mit den Brennpunkten $(\pm 10; 0)$ und den Asymptoten $y = \pm \frac{3}{4}x$, und skizziere H .
c) Man bestimme den im 1. Quadranten liegenden Schnittpunkt S von E und H und bestimme die Gleichung der Tangente an E bzw. H in S .

34. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1998*). Für die reellen Zahlen $0 < b \leq a$ sei

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

die Ellipse in der euklidischen Ebene mit den Brennpunkten

$$f_1 = (-e, 0) \quad \text{und} \quad f_2 = (e, 0) \quad \text{mit} \quad e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Weiter sei $p \in E$ und T die Tangente an E durch p . Man zeige

$$d(T, f_1) \cdot d(T, f_2) = b^2.$$

35. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2000*). Im euklidischen $\mathbb{R}^2$ sei die Hyperbel

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

mit ihren Asymptoten A_1 und A_2 gegeben; weiter sei $p_0 \in H$ und T die Tangente an H in p_0 . Man berechne die Schnittpunkte p_i von A_i und T für $i = 1, 2$ und zeige, daß der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken $m = (0, 0)$, p_1 und p_2 gleich ab ist.

36. Im euklidischen $\mathbb{R}^2$ seien die Ellipse E und die Hyperbel H mit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \quad \text{und} \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

gegeben; dabei bezeichnen F_1 und F_2 die beiden Brennpunkte von E bzw. H .

- a) Man zeige die Brennpunkteigenschaft der Ellipse

$$E = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \}.$$

- b) Man zeige die Brennpunkteigenschaft der Hyperbel

$$H = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \}.$$

Abgabe bis Dienstag, den 16. Dezember 2014, 10⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).