MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 2
21.10.2014

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

5. Man zeige, daß die folgenden Funktionen partiell differenzierbar sind, und bestimme ihre partiellen Ableitungen:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1\, e^{-x_2}$.

   b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2) \cdot \cos(x_1 - x_2)$.

   c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{x_1^2+1}{x_2^2+1}}$.

   d) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad k(x_1, x_2) = \left(x_1^2 + 1\right)^{-x_2}$.

6. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2001).* Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   a) Man zeige, daß f im Punkt $(0, 0)$ stetig ist.
   (Es darf ohne Beweis $|\sin(t)| \leq |t|$ für alle $t \in \mathbb{R}$ benutzt werden.)

   b) Man zeige, daß f im Punkt $(0, 0)$ partiell differenzierbar ist mit

$$\operatorname{grad} f(0, 0) = (1, 1).$$

7. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006).* Gegeben sei die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 - 3\,x\,y^2,$$

   auf der Einheitskreisscheibe $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   a) Man begründe, warum f mindestens eine globale Minimalstelle und eine globale Maximalstelle besitzt.

   b) Man bestimme alle globalen Minimal– und Maximalstellen von f.

8. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2005).* Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   a) Man zeige, daß f stetig in $(0, 0)$ ist.

   b) Man zeige, daß f partiell differenzierbar ist, und bestimme den Gradienten $\operatorname{grad} f(x, y)$ in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   c) Man untersuche, ob f stetig partiell differenzierbar in $(0, 0)$ ist.

Abgabe bis Dienstag, den 28. Oktober 2014, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).