MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2014/15
Blatt 1
14.10.2014

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

1. Man untersuche die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1\, e^{-x_2}$.

   b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = |\sqrt{x_1^2 + 3} - x_2|$.

   c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$

   d) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad k(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$

2. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008).* Gegeben sei

   $$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \leq x \leq \pi \text{ und } 0 \leq y \leq \pi \right\}.$$

   Man begründe, warum die Funktion

   $$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \cos x + \sin y,$$

   globale Extremstellen besitzt, und bestimme zwei Punkte (a, b) und $(c, d) \in D$ mit

   $$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d)$$

   für alle $(x, y) \in D$.

3. Man bestimme die globalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - y^2$,

   a) auf der Einheitskreislinie $D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$,

   b) auf dem Rand des Dreiecks $D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Ecken $(-1, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$.

4. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1995).* Sei $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(-1, -1) = -1$, $f(-1, 1) = f(1, -1) = 0$ und $f(1, 1) = 1$. Man zeige, daß f in $[-1, 1] \times [-1, 1]$ noch unendlich viele Nullstellen hat.

Abgabe bis Dienstag, den 21. Oktober 2014, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).