MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 13
05.08.2020

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

49. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2007).*

    a) Man zeige, daß die Punkte

    $$P_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ P_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \text{ und } P_3 = \begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

    nicht in einer Ebene liegen.

    b) Man zeige, daß es genau eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

    $$f(P_0) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ f(P_1) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ f(P_2) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und } f(P_3) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

    gibt und bestimme eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = A \cdot x + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Ist f eine Affinität?

50. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2006).* Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei die Orthogonalprojektion auf die Ebene

    $$E = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 5\right\}.$$

    Man bestimme die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und den Vektor $b \in \mathbb{R}^3$, so daß

    $$f(x) = A \cdot x + b$$

    für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt.

51. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2001).* Man gebe alle Bewegungen

    $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = A \cdot x + b,$$

    mit einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ an, für die

    $$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

    gilt.

52. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010)*. In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ seien das Dreieck Δ mit den Ecken

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sowie das Dreieck Δ' mit den Ecken

$$a' = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c' = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Man skizziere die beiden Dreiecke Δ und Δ' im kartesischen Koordinatensystem der Ebene und berechne ihre Seitenlängen.

b) Man zeige, daß es genau eine Drehung

$$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad d(x) = D \cdot x + t,$$

mit einer Drehmatrix D und einem Vektor $t \in \mathbb{R}^2$ gibt, welche das Dreieck Δ auf das Dreieck Δ' abbildet. Man gebe D und t explizit an.

c) Man berechne das Drehzentrum z.